9 клас

1. Василь, Петро та Микола вирішили купити два однакові торти. На перший торт вони скинулися у відношенні 8:6:5, на другий торт – у відношенні 7:5:4 (ці числа позначають долі Василя, Петра та Миколи відповідно). Виявилося, що один із хлопців віддав за другий торт на 5 гривень більше, ніж за перший торт. Скільки коштував один торт? Відповідь обґрунтуйте.

2. Сашко, Андрій та Олена вибрали по одному натуральному числу. Сашко помножив своє число на число Олени, а потім помножив своє число на число Андрія. Ці два добутки відрізняються один від одного на 1. Андрій також помножив своє число на число Сашка та на число Олени. Ці два добутки відрізняються на 25. Нарешті, Олена помножила своє число на число Сашка та на число Андрія. На скільки відрізняються отримані Оленою добутки? Відповідь обґрунтуйте.

3. На стороні AB трикутника ABC відмічено точку K так, що $AB = CK$. Точки N і M є серединами відрізків AK і BC відповідно. Відрізки NM і CK перетинаються в точці P. Доведіть, що $KN = KP$.

4. У деякій школі викладають N вчителів, де $N \geq 4$. На новорічну вечірку вони запросили N найкращих учнів школи. Усі $2N$ людей, що прийшли на святкування, сіли за круглий стіл у деякому порядку. Відомо, що два школяра можуть розмовляти один з одним, якщо між ними сидить не більше однієї людини, або якщо між ними сидять рівно дві людини, і принаймні одна з них – вчитель. Доведіть, що є принаймні N пар школярів, які можуть розмовляти один з одним.

5. Чи існують натуральні числа a, b, c і d, що задовольняють рівності $a^2 + b^2 = 5cd$ та $c^2 + d^2 = 5ab$? Відповідь обґрунтуйте.

Кожна задача оцінюється у 7 балів.
На виконання завдань відводиться 3,5 години.
Користуватися калькуляторами, мобільними телефонами та іншими електронними пристроями забороняється.

Умови та розв'язки задач олімпіади та результати учасників можна знайти за адресою `https://sites.google.com/view/kharkiv-math-olymp/`
Апеляція відбудеться 23 грудня з 15^{15} до 16^{30} в ауд. 6-52.

Другий (міський в м. Харкові) етап Всеукраїнської
олімпіади школярів з математики. 20 грудня 2021 року

9 клас

1. Василь, Петро та Микола вирішили купити два однакові торти. На перший торт вони скинулися у відношенні 8:6:5, на другий торт – у відношенні 7:5:4 (ці числа позначають долі Василя, Петра та Миколи відповідно). Виявилося, що один із хлопців віддав за другий торт на 5 гривень більше, ніж за перший торт. Скільки коштував один торт? Відповідь обґрунтуйте.

2. Сашко, Андрій та Олена вибрали по одному натуральному числу. Сашко помножив своє число на число Олени, а потім помножив своє число на число Андрія. Ці два добутки відрізняються один від одного на 1. Андрій також помножив своє число на число Сашка та на число Олени. Ці два добутки відрізняються на 25. Нарешті, Олена помножила своє число на число Сашка та на число Андрія. На скільки відрізняються отримані Оленою добутки? Відповідь обґрунтуйте.

3. На стороні AB трикутника ABC відмічено точку K так, що $AB = CK$. Точки N і M є серединами відрізків AK і BC відповідно. Відрізки NM і CK перетинаються в точці P. Доведіть, що $KN = KP$.

4. У деякій школі викладають N вчителів, де $N \geq 4$. На новорічну вечірку вони запросили N найкращих учнів школи. Усі $2N$ людей, що прийшли на святкування, сіли за круглий стіл у деякому порядку. Відомо, що два школяра можуть розмовляти один з одним, якщо між ними сидить не більше однієї людини, або якщо між ними сидять рівно дві людини, і принаймні одна з них – вчитель. Доведіть, що є принаймні N пар школярів, які можуть розмовляти один з одним.

5. Чи існують натуральні числа a, b, c і d, що задовольняють рівності $a^2 + b^2 = 5cd$ та $c^2 + d^2 = 5ab$? Відповідь обґрунтуйте.

Кожна задача оцінюється у 7 балів.
На виконання завдань відводиться 3,5 години.
Користуватися калькуляторами, мобільними телефонами та іншими електронними пристроями забороняється.

Умови та розв'язки задач олімпіади та результати учасників можна знайти за адресою https://sites.google.com/view/kharkiv-math-olymp/
Апеляція відбудеться 23 грудня з 15^{15} до 16^{30} в ауд. 6-52.