Второй (городской в г. Харькове) этап Всеукраинской олимпиады школьников по математике. 20 октября 2018 года

10 класс

1. В кошельке лежит 1000 гривен одно-, двух- и пятигривневыми купюрами. Известно, что общее число купюр 300, и что купюр каких-то двух достоинств равное количество. Найдите это количество. Ответ обоснуйте.

2. Старшие коэффициенты квадратных трехчленов $f(x)$ и $g(x)$ равны 1. Найдите $f(6)$, если известно, что $g(6) = 5$ и $\dfrac{f(-1)}{g(-1)} = \dfrac{f(1)}{g(1)} = \dfrac{3}{2}$. Ответ обоснуйте.

3. Найдите все такие натуральные числа a, что для любого целого n выполнено равенство НОД$(an+1, 2n+1) = 1$. Ответ обоснуйте.

4. На сторонах AB, AC и BC треугольника ABC выбраны точки M, N и K соответственно так, что выполнены равенства $AM = AN$ и $BM = BK$. Окружность, описанная около треугольника MNK, второй раз пересекает отрезки AB и BC в точках P и Q соответственно. Прямые MN и PQ пересекаются в точке T. Докажите, что прямая CT делит отрезок MP пополам.

5. На плоскости сидят n мух, причём в одной точке может поместиться несколько мух. Две мухи, сидящие в точках A и B, могут перелететь в середину отрезка AB. При каких n мухи могут действовать так, чтобы через конечное число перелётов собраться в одной точке плоскости? Ответ обоснуйте.

Каждая задача оценивается в 7 баллов.
На выполнение заданий отводится 3,5 часа.
Пользоваться калькуляторами, мобильными телефонами и другими электронными устройствами запрещается.

Результаты можно узнать по тел. 707-52-70 (начиная с 22 октября) или .
Апелляция состоится 22 октября с 15^{10} до 17^{00} в ауд. 6-52.
Условия и решения задач олимпиады и результаты можно будет найти в интернете по адресу `sites.google.com/site/kharkivolimp/`

Другий (міський в м. Харкові) етап Всеукраїнської олімпіади школярів з математики. 20 жовтня 2018 року

10 клас

1. У гаманці лежить 1000 гривень одно-, двох- і п'ятигривневими купюрами. Відомо, що загальна кількість купюр 300, і що купюр деяких двох номіналів рівна кількість. Знайдіть цю кількість. Відповідь обґрунтуйте.

2. Старші коефіцієнти квадратних тричленів $f(x)$ і $g(x)$ дорівнюють 1. Знайдіть $f(6)$, якщо відомо, що $g(6) = 5$ і $\dfrac{f(-1)}{g(-1)} = \dfrac{f(1)}{g(1)} = \dfrac{3}{2}$. Відповідь обґрунтуйте.

3. Знайдіть усі такі натуральні числа a, що для будь-якого цілого n виконується рівність НСД$(an+1, 2n+1) = 1$. Відповідь обґрунтуйте.

4. На сторонах AB, AC і BC трикутника ABC обрані точки M, N і K відповідно так, що виконуються рівності $AM = AN$ і $BM = BK$. Коло, описане навколо трикутника MNK, вдруге перетинає відрізки AB і BC в точках P і Q відповідно. Прямі MN і PQ перетинаються в точці T. Доведіть, що пряма CT ділить відрізок MP навпіл.

5. На площині сидять n мух, причому в одній точці може вміститися декілька мух. Дві мухи, які сидять в точках A і B, можуть перелетіти в середину відрізка AB. При яких n мухи можуть діяти таким чином, щоб через скінченну кількість перельотів зібратися в одній точці площини? Відповідь обґрунтуйте.

Кожна задача оцінюється у 7 балів.
На виконання завдань відводиться 3,5 години.
Користуватися калькуляторами, мобільними телефонами та іншими електронними пристроями забороняється.

Результати можна дізнатися за тел. 707-52-70 (починаючи з 22 жовтня).
Апеляція відбудеться 22 жовтня з 15^{10} до 17^{00} в ауд. 6-52.
Умови та розв'язки задач олімпіади та результати можна буде знайти в інтернеті за адресою `sites.google.com/site/kharkivolimp/`