Второй (городской в г. Харькове) этап Всеукраинской олимпиады школьников по математике. 21 октября 2017 года

9 класс

1. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x+y=(y+z)^2, \\ y+z=(x+z)^2, \\ x+z=(x+y)^2. \end{cases}$

2. Число $x^2-[x]\cdot\{x\}$ – целое. Докажите, что тогда $x\cdot[x]\cdot\{x\}$ тоже целое. *Здесь $[x]$ обозначена целая часть числа, т. е. наибольшее целое число, не превосходящее данное, а $\{x\}$ – дробная часть числа, т. е. $x-[x]$.*

3. Окружность пересекает стороны AB, BC и CA треугольника ABC в точках R и S, M и N, P и Q соответственно, таким образом, что точка S лежит на отрезке RB, точка N – на отрезке MC, точка Q – на отрезке PA. Докажите, что если $RS=MN=PQ$ и $QR=SM=NP$, то треугольник ABC – равносторонний.

4. Учитель записал на доске натуральное число, цифры которого не повторяются. Он попросил учеников назвать все двузначные числа, образованные соседними цифрами записанного числа (в том же порядке, что и на доске). Оказалось, что все названные числа являются либо точными квадратами, либо простыми числами. Какое наибольшее число мог записать учитель? Ответ обоснуйте.

5. В течение года было проведено 44 олимпиады. Известно, что в каждой из олимпиад победителями становились ровно 7 участников. Кроме того, для любых двух олимпиад нашелся ровно один участник, победивший в них обеих. Докажите, что найдется участник, ставший победителем всех олимпиад.

Каждая задача оценивается в 7 баллов.
На выполнение заданий отводится 3,5 часа.
Пользоваться калькуляторами, мобильными телефонами и другими электронными устройствами запрещается.

Результаты можно узнать по тел. 707-52-70 (начиная с 23 октября).
Апелляция состоится 24 октября с 13^{30} до 15^{00} в ауд. 6-52.
Условия и решения задач олимпиады можно будет найти в интернете по адресу `sites.google.com/site/kharkivolimp/`

Другий (міський в м. Харкові) етап Всеукраїнської олімпіади школярів з математики. 21 жовтня 2017 року

9 клас

1. Розв'яжіть систему рівнянь: $\begin{cases} x+y=(y+z)^2, \\ y+z=(x+z)^2, \\ x+z=(x+y)^2. \end{cases}$

2. Число $x^2-[x]\cdot\{x\}$ – ціле. Доведіть, що тоді $x\cdot[x]\cdot\{x\}$ теж ціле. *Тут через $[x]$ позначено цілу частину числа, тобто найбільше ціле число, що не перевищує дане, а $\{x\}$ – дробову частину числа, тобто $x-[x]$.*

3. Коло перетинає сторони AB, BC і CA трикутника ABC у точках R і S, M і N, P і Q відповідно, таким чином, що точка S належить відрізку RB, точка N – відрізку MC, точка Q – відрізку PA. Доведіть, що якщо $RS=MN=PQ$ і $QR=SM=NP$, то трикутник ABC – рівносторонній.

4. Вчитель записав на дошці натуральне число, цифри якого не повторюються. Він попросив учнів назвати всі двозначні числа, що утворені сусідніми цифрами записаного числа (в такому ж порядку, що й на дошці). Виявилось, що всі названі числа є або точними квадратами, або простими числами. Яке найбільше число міг записати вчитель? Відповідь обґрунтуйте.

5. Протягом року було проведено 44 олімпіади. Відомо, що в кожній з олімпіад переможцями ставали рівно 7 учасників. Крім того, для будь-яких двох олімпіад знайшовся рівно один учасник, який переміг у них обох. Доведіть, що знайдеться учасник, який став переможцем усіх олімпіад.

Кожна задача оцінюється у 7 балів.
На виконання завдань відводиться 3,5 години.
Користуватися калькуляторами, мобільними телефонами та іншими електронними пристроями забороняється.

Результати можна дізнатися за тел. 707-52-70 (починаючи з 23 жовтня).
Апеляція відбудеться 24 жовтня з 13^{30} до 15^{00} в ауд. 6-52.
Умови та розв'язки задач олімпіади можна буде знайти в інтернеті за адресою `sites.google.com/site/kharkivolimp/`