

10 класс

1. Вычислите сумму

$$S = -1 - 2 + 3 + 4 + 5 + 6 - 7 - 8 + 9 + 10 + 11 + 12 - \dots - \\ -2011 - 2012 + 2013 + 2014 + 2015 + 2016.$$

(В сумме стоят подряд два знака «-», затем четыре знака «+», потом опять два «-», дальше четыре «+» и т. д.) Ответ обоснуйте.

2. Целые числа n , m и k таковы, что $(n - m)(m - k)(k - n) = n + m + k$. Докажите, что число $n + m + k$ делится на 27.

3. В остроугольном треугольнике ABC проведена биссектриса AD . Окружность, описанная вокруг треугольника ABD , пересекает прямую, перпендикулярную AD и проходящую через точку B , в точке E . Точка O – центр описанной окружности треугольника ABC . Докажите, что точки A , O , E лежат на одной прямой.

4. Назовём диагональ клетчатой доски *длинной*, если на ней не меньше трёх клеток, и *короткой* в противном случае. Алина хочет расставить несколько слонов на доске $N \times N$ так, чтобы на каждой длинной диагонали находился ровно один слон, а на коротких диагоналях слонов не было. При каких натуральных N она сможет это сделать? Ответ обоснуйте.

5. Для неотрицательных чисел x_1, x_2, \dots, x_n докажите неравенство

$$1 \leq \frac{\left(x_1 + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{3} + \dots + \frac{x_n}{n}\right) \cdot (x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \dots + nx_n)}{(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n)^2} \leq \frac{(n+1)^2}{4n}.$$

Каждая задача оценивается в 7 баллов.

На выполнение заданий отводится 3,5 часа.

Пользоваться калькуляторами, мобильными телефонами и другими электронными устройствами запрещается.

Результаты можно узнать по тел. 707-52-70 (начиная с 18 октября).

Апелляция состоится 20 октября с 16⁰⁰ до 17³⁰ в ауд. 6-52.

Условия и решения задач олимпиады можно будет найти в интернете по адресу sites.google.com/site/kharkivolimp/

10 клас

1. Обчисліть суму

$$S = -1 - 2 + 3 + 4 + 5 + 6 - 7 - 8 + 9 + 10 + 11 + 12 - \dots - \\ -2011 - 2012 + 2013 + 2014 + 2015 + 2016.$$

(В сумі стоять поспіль два знаки «-», потім чотири знаки «+», потім знов два «-», далі чотири «+» і т. д.) Відповідь обґрунтуйте.

2. Цілі числа n , m та k такі, що $(n - m)(m - k)(k - n) = n + m + k$. Доведіть, що число $n + m + k$ ділиться на 27.

3. У гострокутному трикутнику ABC проведено бісектрису AD . Коло, що описане навколо трикутника ABD , перетинає пряму, що перпендикулярна до AD та проходить через точку B , в точці E . Точка O – центр описаного кола трикутника ABC . Доведіть, що точки A , O , E належать одній прямій.

4. Назвемо діагональ клітчастої дошки *довгою*, якщо на ній не менш ніж три клітинки, та *короткою* в протилежному випадку. Аліна хоче розставити декілька слонів на дошці $N \times N$ так, щоб на кожній довгій діагоналі знаходився рівно один слон, а на коротких діагоналях слонів не було. При яких натуральних N вона зможе це зробити? Відповідь обґрунтуйте.

5. Для невід'ємних чисел x_1, x_2, \dots, x_n доведіть нерівність

$$1 \leq \frac{\left(x_1 + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{3} + \dots + \frac{x_n}{n}\right) \cdot (x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \dots + nx_n)}{(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n)^2} \leq \frac{(n+1)^2}{4n}.$$

Кожна задача оцінюється у 7 балів.

На виконання завдань відводиться 3,5 години.

Користуватися калькуляторами, мобільними телефонами та іншими електронними пристроями забороняється.

Результати можна дізнатися за тел. 707-52-70 (починаючи з 18 жовтня).

Апелляція відбудеться 20 жовтня з 16⁰⁰ до 17³⁰ в ауд. 6-52.

Умови та розв'язки задач олімпіади можна буде знайти в інтернеті за адресою sites.google.com/site/kharkivolimp/