11 класс

1. Известно, что $\cos x \neq 0$. Докажите неравенство

$$\left|\frac{\cos 2x + 3}{\cos x}\right| \geq 4.$$

2. Найдите все тройки простых чисел, для которых все три их положительные попарные разности также простые. Ответ обоснуйте.

3. В прямоугольнике $ABCD$ точка M – середина стороны BC. Точки P и Q на диагонали AC таковы, что $\angle DPC = \angle DQM = 90°$. Докажите, что Q – середина отрезка AP.

4. Даны попарно различные ненулевые действительные числа a, b, c. Известно, что уравнения $ax^3 + bx + c = 0$, $bx^3 + cx + a = 0$, $cx^3 + ax + b = 0$ имеют общий действительный корень. Докажите, что по крайней мере одно из этих уравнений имеет хотя бы два различных действительных корня.

5. В 1 класс пришли учиться 7 мальчиков и 13 девочек. В течение первых трёх месяцев каждый мальчик познакомился с каждой девочкой. Докажите, что найдутся такие два мальчика и такие две девочки, что оба мальчика познакомились с обеими девочками в одном и том же месяце.

Каждая задача оценивается в 7 баллов.
На выполнение заданий отводится 3,5 часа.
Пользоваться калькуляторами, мобильными телефонами и другими электронными устройствами запрещается.

Результаты можно узнать по тел. 707-52-70 (начиная с 20 октября).
Апелляция состоится 21 октября с 15^{30} до 17^{00} в ауд. 6-52.
Условия и решения задач олимпиады можно будет найти в интернете по адресу `sites.google.com/site/kharkivolimp/`

11 клас

1. Відомо, що $\cos x \neq 0$. Доведіть нерівність

$$\left|\frac{\cos 2x + 3}{\cos x}\right| \geq 4.$$

2. Знайдіть усі трійки простих чисел, для яких усі три їх додатні попарні різниці також прості. Відповідь обґрунтуйте.

3. У прямокутнику $ABCD$ точка M – середина сторони BC. Точки P та Q обрано на діагоналі AC так, що $\angle DPC = \angle DQM = 90°$. Доведіть, що Q – середина відрізка AP.

4. Задані попарно різні ненульові дійсні числа a, b, c. Відомо, що рівняння $ax^3 + bx + c = 0$, $bx^3 + cx + a = 0$, $cx^3 + ax + b = 0$ мають спільний дійсний корінь. Доведіть, що принаймні одне з цих рівнянь має хоча б два різних дійсних корені.

5. У 1 клас прийшли вчитися 7 хлопчиків і 13 дівчаток. Протягом перших трьох місяців кожен хлопчик познайомився з кожною дівчинкою. Доведіть, що знайдуться такі два хлопчики й такі дві дівчинки, що обидва хлопці познайомилися з обома дівчатками в одному й тому ж місяці.

Кожна задача оцінюється у 7 балів.
На виконання завдань відводиться 3,5 години.
Користуватися калькуляторами, мобільними телефонами та іншими електронними пристроями забороняється.

Результати можна дізнатися за тел. 707-52-70 (починаючи з 20 жовтня).
Апеляція відбудеться 21 жовтня з 15^{30} до 17^{00} в ауд. 6-52.
Умови та розв'язки задач олімпіади можна буде знайти в інтернеті за адресою `sites.google.com/site/kharkivolimp/`