10 класс

1. Рассмотрим функции $y = x^2 + px + q$ при всевозможных p и q, для которых $p + \frac{q}{2} = 2015$. Докажите, что на плоскости есть точка, которая принадлежит графикам всех таких функций.

2. Первые два члена некоторой геометрической прогрессии – однозначные числа. Из них составили двузначное число A (первый член прогрессии – первая цифра A, а второй – вторая). Оказалось, что число A в три раза больше третьего члена этой прогрессии. Найдите все возможные значения A. Ответ обоснуйте.

3. На стороне AB треугольника ABC выбрана точка M. Прямая, проходящая через M, пересекает отрезок AC в точке N и луч CB в точке K. Описанная окружность треугольника AMN пересекает описанную окружность ω треугольника ABC в точках A и S. Прямые SM и SK второй раз пересекают ω в точках P и Q соответственно. Докажите, что $AC = PQ$.

4. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_k$ – действительные числа ($k \geq 2$). Докажите, что если $x_1 + x_2 + \ldots + x_k = 0$ и $|x_1| + |x_2| + \ldots + |x_k| = 1$, то $|x_1 + 2x_2 + \ldots + kx_k| \leq \frac{k-1}{2}$.

5. Можно ли построить бесконечную последовательность множеств M_1, M_2, M_3, ..., состоящих из натуральных чисел, такую, что для всех натуральных k во множестве M_k содержится ровно k элементов, а для любых n и k пересечение множеств M_n и M_k совпадает с множеством $M_{(n,k)}$? (*Тут* $(n,k) =$ *НОД*(n,k).) Ответ обоснуйте.

Каждая задача оценивается в 7 баллов.
На выполнение заданий отводится 3,5 часа.
Пользоваться калькуляторами, мобильными телефонами и другими электронными устройствами запрещается.

Результаты можно узнать по тел. 707-52-70 (начиная с 20 октября).
Апелляция состоится 21 октября с 15^{30} до 17^{00} в ауд. 6-52.
Условия и решения задач олимпиады можно будет найти в интернете по адресу `sites.google.com/site/kharkivolimp/`

10 клас

1. Розглянемо функції $y = x^2 + px + q$ при усіх можливих p і q, для яких $p + \frac{q}{2} = 2015$. Доведіть, що на площині існує точка, яка належить графікам усіх таких фукнцій.

2. Перші два члени деякої геометричної прогресії – одноцифрові числа. З них склали двоцифрове число A (перший член прогресії – перша цифра A, а другий – друга). Виявилося, що число A у три рази більше від третього члена цієї прогресії. Знайдіть усі можливі значення A. Відповідь обґрунтуйте.

3. На стороні AB трикутника ABC вибрано точку M. Пряма, що проходить через M, перетинає відрізок AC у точці N і промінь CB у точці K. Описане коло трикутника AMN перетинає описане коло ω трикутника ABC у точках A і S. Прямі SM і SK вдруге перетинають ω у точках P и Q відповідно. Доведіть, що $AC = PQ$.

4. Нехай x_1, x_2, ..., x_k – дійсні числа ($k \geq 2$). Доведіть, що якщо $x_1 + x_2 + \ldots + x_k = 0$ і $|x_1| + |x_2| + \ldots + |x_k| = 1$, то $|x_1 + 2x_2 + \ldots + kx_k| \leq \frac{k-1}{2}$.

5. Чи можна побудувати нескінченну послідовність множин M_1, M_2, M_3, ..., що складаються з натуральних чисел, таку, що для всіх натуральних k у множині M_k міститься рівно k елементів, а для будь-яких n і k перетин множин M_n і M_k збігається з множиною $M_{(n,k)}$? (*Тут* $(n,k) =$ *НСД*(n,k).) Відповідь обґрунтуйте.

Кожна задача оцінюється у 7 балів.
На виконання завдань відводиться 3,5 години.
Користуватися калькуляторами, мобільними телефонами та іншими електронними пристроями забороняється.

Результати можна дізнатися за тел. 707-52-70 (починаючи з 20 жовтня).
Апеляція відбудеться 21 жовтня з 15^{30} до 17^{00} в ауд. 6-52.
Умови та розв'язки задач олімпіади можна буде знайти в інтернеті за адресою `sites.google.com/site/kharkivolimp/`