

11 класс

1. У Рапунцель волосы растут вдвое быстрее, чем она сама, а у Алисы, которая растёт со скоростью волос Рапунцель, – в полтора раза быстрее, чем растёт Алиса. Сейчас у Алисы и Рапунцель одинаковая высота волос над полом. Чьи волосы раньше достигнут пола? Ответ обоснуйте.

2. Пусть $\{a_n\}$ возрастающая арифметическая прогрессия, состоящая из натуральных чисел. Известно, что $a_3 = 13$. Найдите наибольшее возможное значение выражения

$$a_{a_1} + a_{a_2} + a_{a_3} + a_{a_4} + a_{a_5}.$$

Ответ обоснуйте.

3. Найдите все пары простых чисел (p, q) , при которых уравнение

$$x^4 + (q - 2)x = p - 4$$

имеет хотя бы один целый корень.

4. В стране 2014 городов, причём любые два из них соединены ровно одной односторонней авиалинией. Известно, что из каждого города можно вылететь хотя бы в один из остальных городов страны. Назовём город *центральным*, если до него можно долететь из любого другого, сделав не более одной пересадки. Найдите максимальное k такое, что, независимо от направления авиалиний, хотя бы k городов будут центральными. Ответ обоснуйте.

5. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке E . На стороне AD выбрана точка P такая, что $PE = EC$. Описанная окружность треугольника BCD пересекает отрезок AD в точке Q . Окружность, проходящая через точку A и касающаяся прямой EP в точке P , пересекает отрезок AC в точке R . Оказалось, что точки B, Q, R лежат на одной прямой. Докажите, что $\angle BCD = 90^\circ$.

Каждая задача оценивается в 7 баллов.

На выполнение заданий отводится 3,5 часа.

Пользоваться калькуляторами, мобильными телефонами и другими электронными устройствами запрещается.

Результаты можно узнать по тел. 707-52-70 (начиная со 2 декабря).

Апелляция состоится 3 декабря с 15⁰⁰ до 17⁰⁰ в ауд. 6-52.

Условия и решения задач олимпиады можно будет найти в интернете

по адресу sites.google.com/site/kharkivolimp/

11 клас

1. У Рапунцель волосся росте вдвічі швидше, ніж вона сама, а в Алісі, яка росте зі швидкістю волосся Рапунцель, – у півтора рази швидше, ніж росте Аліса. Зараз в Алісі й у Рапунцель однакова висота волосся над підлогою. Чіє волосся раніше досягне підлоги? Відповідь обґрунтуйте.

2. Нехай $\{a_n\}$ зростаюча арифметична прогресія, що складається з натуральних чисел. Відомо, що $a_3 = 13$. Знайдіть найбільше можливе значення виразу

$$a_{a_1} + a_{a_2} + a_{a_3} + a_{a_4} + a_{a_5}.$$

Відповідь обґрунтуйте.

3. Знайдіть усі пари простих чисел (p, q) , при яких рівняння

$$x^4 + (q - 2)x = p - 4$$

має хоча б один цілий корінь.

4. У країні 2014 міст, причому будь-які два з них з'єднані рівно однією односторонньою авіалінією. Відомо, що з кожного міста можна вилетіти хоча б до одного з решти міст країни. Назвемо місто *центральним*, якщо до нього можна долетіти з будь-якого іншого, зробивши не більше однієї пересадки. Знайдіть максимальне k таке, що, незалежно від напрямку авіаліній, хоча б k міст будуть центральними. Відповідь обґрунтуйте.

5. В опуклому чотирикутнику $ABCD$ діагоналі AC й BD взаємно перпендикулярні та перетинаються в точці E . На стороні AD обрано точку P , що $PE = EC$. Описане коло трикутника BCD перетинає відрізок AD в точці Q . Коло, що проходить через точку A і дотикається прямої EP в точці P , перетинає відрізок AC в точці R . Виявилось, що точки B, Q, R належать одній прямій. Доведіть, що $\angle BCD = 90^\circ$.

Кожна задача оцінюється у 7 балів.

На виконання завдань відводиться 3,5 години.

Користуватися калькуляторами, мобільними телефонами та іншими електронними пристроями забороняється.

Результати можна дізнатися за тел. 707-52-70 (починаючи з 2 грудня).

Апеляція відбудеться 3 грудня з 15⁰⁰ до 17⁰⁰ в ауд. 6-52.

Умови та розв'язки задач олімпіади можна буде знайти в інтернеті

за адресою sites.google.com/site/kharkivolimp/