

**10 класс**

1. Числа  $a, b, c$  таковы, что выражения

$$\frac{a+b}{c}, \quad \frac{a+c}{b}, \quad \frac{b+c}{a}$$

принимают одно и то же значение. Чему может быть равно это значение? Ответ обоснуйте.

2. Винтик и Шпунтик пошли в магазин за болтиками и гаечками и потратили там поровну денег. Оказалось, что всех гаечек, которые они купили, хватает только на болтики Винтика (зато ровно-ровно). Винтик купил 10 гаечек. Сколько болтиков купил Шпунтик, если известно, что цена болтика равняется цене гаечки? Ответ обоснуйте.

3. На доске написано натуральное число. Каждую минуту Незнайка прибавляет к этому числу удвоенное количество его натуральных делителей (считая единицу и само число) и записывает полученное число на доску вместо исходного. Оказалось, что дважды на доске был записан полный квадрат. Докажите, что Незнайка ошибся во время своих вычислений.

4. Пятиугольник  $ABCDE$  вписан в окружность  $\omega$ . Пусть  $T$  – точка пересечения диагоналей  $BE$  и  $AD$ . Через точку  $T$  проведена прямая, параллельная  $CD$ , которая пересекает  $AB$  и  $CE$  в точках  $X$  и  $Y$  соответственно. Докажите, что описанная окружность треугольника  $AXY$  касается  $\omega$ .

5. Тюбик покрасил каждое целое число в красный или синий цвет. Известно, что в любом наборе из нескольких последовательных целых чисел количества красных и синих чисел отличаются не более, чем на 1000. Докажите, что существуют 2000 последовательных целых чисел, среди которых ровно 1000 красных и 1000 синих.

*Каждая задача оценивается в 7 баллов.*

*На выполнение заданий отводится 3,5 часа.*

*Пользоваться калькуляторами, мобильными телефонами и другими электронными устройствами запрещается.*

Результаты можно узнать по тел. 707-52-70 (начиная с 17 декабря).

Апелляция состоится 17 декабря с 17<sup>00</sup> до 18<sup>00</sup> в ауд. 6-38.

Условия и решения задач олимпиады можно будет найти в интернете по адресу [sites.google.com/site/kharkivolimp/](http://sites.google.com/site/kharkivolimp/)

**10 клас**

1. Числа  $a, b, c$  такі, що вирази

$$\frac{a+b}{c}, \quad \frac{a+c}{b}, \quad \frac{b+c}{a}$$

набувають одне й те саме значення. Чому може дорівнювати це значення? Відповідь обґрунтуйте.

2. Винтик і Шпунтик пішли до магазину за болтиками і гаечками і витратили там порівну грошей. Виявилося, що усіх гаечок, які вони купили, вистачає тільки на болтики Винтика (зате рівно-рівно). Винтик купив 10 гаечок. Скільки болтиків купив Шпунтик, якщо відомо, що ціна болтика дорівнює ціні гаечки? Відповідь обґрунтуйте.

3. На дошці написано натуральне число. Кожну хвилину Незнайко додає до цього числа подвоєну кількість його натуральних дільників (враховуючи одиницю і саме число) та записує отримане число на дошку замість вихідного. Виявилося, що двічі на дошці був записаний повний квадрат. Доведіть, що Незнайко помилився під час своїх підрахунків.

4. П'ятикутник  $ABCDE$  вписаний у коло  $\omega$ . Нехай  $T$  – точка перетину діагоналей  $BE$  і  $AD$ . Через точку  $T$  проведено пряму, паралельну  $CD$ , яка перетинає  $AB$  і  $CE$  у точках  $X$  та  $Y$  відповідно. Доведіть, що описане коло трикутника  $AXY$  дотикається до  $\omega$ .

5. Тюбик пофарбував кожне ціле число у червоний або синій колір. Відомо, що у будь-якому наборі з декількох послідовних цілих чисел кількості червоних і синіх чисел відрізняються не більше, ніж на 1000. Доведіть, що існують 2000 послідовних цілих чисел, серед яких рівно 1000 червоних і 1000 синіх.

*Кожна задача оцінюється у 7 балів.*

*На виконання завдань відводиться 3,5 години.*

*Користуватися калькуляторами, мобільними телефонами та іншими електронними пристроями забороняється.*

Результати можна дізнатися за тел. 707-52-70 (починаючи з 17 грудня).

Апеляція відбудеться 17 грудня з 17<sup>00</sup> до 18<sup>00</sup> в ауд. 6-38.

Умови та розв'язки задач олімпіади можна буде знайти в інтернеті за адресою [sites.google.com/site/kharkivolimp/](http://sites.google.com/site/kharkivolimp/)