

9 класс

1. Поливальная машина движется с постоянной скоростью, и каждую минуту из неё вытекает одно и то же количество воды. Если бы скорость движения увеличилась в 2 раза, а скорость вытекания воды увеличилась бы в 3 раза, то содержащейся в машине воды хватило бы на то, чтобы полить 4 км дороги. Сколько километров дороги удастся полить, если скорость движения увеличить в 3 раза, а скорость вытекания воды увеличить в 2 раза? Ответ обоснуйте.

2. Можно ли расставить по кругу 2014 натуральных чисел так, чтобы каждое число равнялось либо сумме, либо разности двух соседних чисел? Ответ обоснуйте.

3. Даны числа a_1, a_2, \dots, a_{10} . Известно, что каждое из десяти квадратных уравнений

$x^2 - a_1x + a_2 = 0, x^2 - a_2x + a_3 = 0, \dots, x^2 - a_9x + a_{10} = 0, x^2 - a_{10}x + a_1 = 0$
имеет не больше одного решения. Докажите, что все числа a_1, a_2, \dots, a_{10} не превосходят 4.

4. На стороне AB треугольника ABC выбрана точка D такая, что $AC = CD$. На дуге BC описанной окружности треугольника BCD (не содержащей точки D) выбрана точка E , для которой $\angle ACB = \angle ABE$. На продолжении отрезка BC за точку C отмечена точка F такая, что $CE = CF$. Докажите, что $AB = AF$.

5. У алхимика Вальтера есть 15 мер ртути и 10 мер серы. Он может проводить алхимические реакции трёх типов. Может соединить одну меру ртути и одну меру любого другого вещества при низкой температуре, и тогда получится три меры этого вещества. Может соединить меру серы и меру ртути при высокой температуре, и получится мера кислоты. Наконец, может соединить меру серы и меру кислоты (при любой температуре), и получится мера ртути. Для приготовления меры философского зелья алхимику необходимо взять 1 меру ртути, 2 меры серы и 3 меры кислоты. Какое наибольшее количество мер философского зелья сможет приготовить Вальтер? Ответ обоснуйте.

Каждая задача оценивается в 7 баллов.

На выполнение заданий отводится 3,5 часа.

Пользоваться калькуляторами, мобильными телефонами и другими электронными устройствами запрещается.

9 клас

1. Поливальна машина рухається з постійною швидкістю, і кожен хвилину з неї витікає одна й та сама кількість води. Якби швидкість руху збільшити у 2 рази, а швидкість витікання води збільшити у 3 рази, то води, що міститься у машині, вистачило б на те, щоб полити 4 км дороги. Скільки кілометрів дороги вдасться полити, якщо швидкість руху збільшити у 3 рази, а швидкість витікання води збільшити у 2 рази? Відповідь обґрунтуйте.

2. Чи можна розташувати по колу 2014 натуральних чисел так, щоб кожне число дорівнювало або сумі, або різниці двох сусідніх чисел? Відповідь обґрунтуйте.

3. Дано числа a_1, a_2, \dots, a_{10} . Відомо, що кожне з десяти квадратних рівнянь

$x^2 - a_1x + a_2 = 0, x^2 - a_2x + a_3 = 0, \dots, x^2 - a_9x + a_{10} = 0, x^2 - a_{10}x + a_1 = 0$
має не більше одного розв'язку. Доведіть, що всі числа a_1, a_2, \dots, a_{10} не перевищують 4.

4. На стороні AB трикутника ABC обрано точку D таку, що $AC = CD$. На дузі BC описаного кола трикутника BCD (що не містить точку D) обрано точку E , для якої $\angle ACB = \angle ABE$. На продовженні відрізка BC за точку C відмічено точку F таку, що $CE = CF$. Доведіть, що $AB = AF$.

5. У алхіміка Вальтера є 15 мір ртуті й 10 мір сірки. Він може проводити алхімічні реакції трьох типів. Може з'єднати одну міру ртуті й одну міру будь-якої іншої речовини при низькій температурі, і тоді вийде три міри цієї речовини. Може з'єднати міру сірки й міру ртуті при високій температурі, і вийде міра кислоти. Нарешті, може з'єднати міру сірки й міру кислоти (при будь-якій температурі), і вийде міра ртуті. Для виготовлення міри філософського зілля алхіміку необхідно взяти 1 міру ртуті, 2 міри сірки й 3 міри кислоти. Яку найбільшу кількість мір філософського зілля зможе приготувати Вальтер? Відповідь обґрунтуйте.

Кожна задача оцінюється у 7 балів.

На виконання завдань відводиться 3,5 години.

Користуватися калькуляторами, мобільними телефонами та іншими електронними пристроями забороняється.

Результаты можно узнать по тел. 707-52-70 (начиная с 17 декабря).

Апелляция состоится 17 декабря с 17⁰⁰ до 18⁰⁰ в ауд. 6-38.

Условия и решения задач олимпиады можно будет найти в интернете по адресу sites.google.com/site/kharkivolimp/

Результати можна дізнатися за тел. 707-52-70 (починаючи з 17 грудня).

Апеляція відбудеться 17 грудня з 17⁰⁰ до 18⁰⁰ в ауд. 6-38.

Умови та розв'язки задач олімпіади можна буде знайти в інтернеті за адресою sites.google.com/site/kharkivolimp/