

## 11 класс

### 1. Решите уравнение

$$(1 + x + x^2 + \cdots + x^{27})(1 + x + x^2 + \cdots + x^{63}) = (1 + x + x^2 + \cdots + x^{45})^2.$$

2. Владислав Петрович ездит на машине со скоростью 120 км/ч. Однако, проезжая мимо поста ДПС (в любом из направлений), он замедляется и до ближайшего перекрестка едет со скоростью 60 км/ч. Расстояние между перекрестками  $A$  и  $B$  равно 60 км, и на пути между ними расположено еще 11 перекрестков. Докажите, что можно расставить на этом пути 6 постов ДПС так, чтобы дорога от  $A$  до  $B$  и обратно заняла у Владислава Петровича не менее 1 часа 15 минут. Располагать пост на перекрестке не разрешается.

3. Найдите все такие пары простых чисел  $(p, q)$ , что оба числа  $p^2 + q^3$  и  $p^3 + q^2$  являются точными квадратами.

4. Вписанная окружность  $\omega$  треугольника  $ABC$  касается его сторон  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$  в точках  $D$ ,  $E$  и  $F$  соответственно. Точка  $G$  выбрана на  $\omega$  таким образом, что  $FG$  – диаметр. Прямые  $EG$  и  $FD$  пересекаются в точке  $H$ . Докажите, что  $AB \parallel CH$ .

5. В школе учатся 360 девочек. Каждый мальчик в школе дружит ровно с тремя девочками, а каждая девочка дружит ровно с пятью девочками. При этом для любых двух дружащих друг с другом девочек есть хотя бы один мальчик, который дружит с ними обеими. Какое наименьшее количество мальчиков может учиться в этой школе?

Каждая задача оценивается в 7 баллов.

На выполнение заданий отводится 3,5 часа.

Пользоваться калькуляторами, мобильными телефонами  
и другими электронными устройствами запрещается.

Результаты можно узнать по тел. 707-52-70 (начиная с 19 декабря).

Апелляция состоится 20 декабря с 15<sup>00</sup> до 17<sup>00</sup> в ауд. 6-38.

Условия и решения задач олимпиады можно будет найти в интернете  
по адресу <http://sites.google.com/site/kharkivolimp/>

## 11 клас

### 1. Розв'яжіть рівняння

$$(1 + x + x^2 + \cdots + x^{27})(1 + x + x^2 + \cdots + x^{63}) = (1 + x + x^2 + \cdots + x^{45})^2.$$

2. Владислав Петрович їздить на машині зі швидкістю 120 км/год. Проте, проїжджаючи повз пост ДПС (у кожному з напрямків), він сповільнюється й до найближчого перехрестя іде зі швидкістю 60 км/год. Відстань між перехрестями  $A$  та  $B$  дорівнює 60 км, і на шляху між ними розташовано ще 11 перехресть. Доведіть, що можна розташувати на цьому шляху 6 постів ДПС таким чином, щоб дорога від  $A$  до  $B$  та назад зайняла у Владислава Петровича не менше 1 години 15 хвилин. Розташовувати пост на перехресті не дозволяється.

3. Знайдіть усі такі пари простих чисел  $(p, q)$ , що обидва числа  $p^2 + q^3$  та  $p^3 + q^2$  є точними квадратами.

4. Вписане коло  $\omega$  трикутника  $ABC$  дотикається його сторін  $BC$ ,  $CA$  й  $AB$  у точках  $D$ ,  $E$  й  $F$  відповідно. Точку  $G$  обрано на  $\omega$  таким чином, що  $FG$  – діаметр. Прямі  $EG$  та  $FD$  перетинаються в точці  $H$ . Доведіть, що  $AB \parallel CH$ .

5. У школі навчаються 360 дівчаток. Кожен хлопчик у школі товаришує рівно з трьома дівчатками, а кожна дівчинка тваришує рівно з п'ятьма дівчатками. При цьому для будь-яких двох дівчаток, що тварушують одна з одною, є хоча б один хлопчик, що тваришує з ними обома. Яка найменша кількість хлопчиків може навчатися в цій школі?

Кожна задача оцінюється у 7 балів.

На виконання завдань відводиться 3,5 години.

Користуватися калькуляторами, мобільними телефонами  
та іншими електронними пристроями забороняється.

Результати можна дізнатися за тел. 707-52-70 (починаючи з 19 грудня).

Апеляція відбудеться 20 грудня з 15<sup>00</sup> до 17<sup>00</sup> в ауд. 6-38.

Умови та розв'язки задач олімпіади можна буде знайти в інтернеті  
за адресою <http://sites.google.com/site/kharkivolimp/>