Второй (городской в г. Харькове) этап Всеукраинской олимпиады школьников по математике. 16 декабря 2012 года

10 класс

1. Найдите все такие пары действительных чисел (a, b), что $a+b=1$ и выполнено равенство $(a^2+b^2)(a^3+b^3)=a^4+b^4$.

2. В клетках квадратной таблицы со стороной 2012 расставлены целые числа. Раз в минуту число в каждой клетке заменяется на сумму всех 4022 чисел, стоящих в одной строке или одном столбце с этой клеткой (само число в эту сумму не входит). Может ли через некоторое время сумма всех чисел в таблице оказаться равной 201220122012?

3. Докажите, что если $u, v \geq \frac{1}{2}$, то выполняется неравенство

$$u^2v^2+2(u+v) \geq 4uv+1.$$

4. В остроугольном треугольнике ABC на сторонах AC и BC выбраны такие точки D и E, что точки A, B, E и D лежат на одной окружности. Окружность, описанная вокруг треугольника DEC, пересекает сторону AB в точках X и Y. Докажите, что середина отрезка XY является основанием высоты треугольника, опущенной из точки C.

5. Множество различных натуральных чисел называется равномерным, если после удаления любого из его элементов остальные можно распределить по двум подмножествам с одинаковой суммой элементов. Найдите наименьшее натуральное $n>1$, для которого существует равномерное множество из n элементов.

Каждая задача оценивается в 7 баллов.
На выполнение заданий отводится 3,5 часа.
Пользоваться калькуляторами, мобильными телефонами и другими электронными устройствами запрещается.

Результаты можно узнать по тел. 707-52-70 (начиная с 19 декабря).
Апелляция состоится 20 декабря с 15^{00} до 17^{00} в ауд. 6-38.
Условия и решения задач олимпиады можно будет найти в интернете по адресу `http://sites.google.com/site/kharkivolimp/`

Другий (міський в м. Харкові) етап Всеукраїнської олімпіади школярів з математики. 16 грудня 2012 року

10 клас

1. Знайдіть усі такі пари дійсних чисел (a, b), що $a+b=1$ і виконується рівність $(a^2+b^2)(a^3+b^3)=a^4+b^4$.

2. У клітинках квадратної таблиці зі стороною 2012 розташовано цілі числа. Щохвилини число в кожній клітинці заміняється на суму всіх 4022 чисел, що стоять в одному рядку або одному стовпці із цією клітинкою (саме число в цю суму не входить). Чи може через деякий час сума всіх чисел у таблиці виявитися рівною 201220122012?

3. Доведіть, що коли $u, v \geq \frac{1}{2}$, то виконується нерівність

$$u^2v^2+2(u+v) \geq 4uv+1.$$

4. У гострокутному трикутнику ABC на сторонах AC і BC обрано такі точки D й E, що точки A, B, E та D лежать на одному колі. Описане коло трикутника DEC, перетинає сторону AB у точках X та Y. Доведіть, що середина відрізка XY є основою висоти трикутника, опущеної з точки C.

5. Множина різних натуральних чисел називається рівномірною, якщо після видалення будь-якого з її елементів інші можна розподілити по двох підмножинах з однаковою сумою елементів. Знайдіть найменше натуральне $n>1$, для якого існує рівномірна множина з n елементів.

Кожна задача оцінюється у 7 балів.
На виконання завдань відводиться 3,5 години.
Користуватися калькуляторами, мобільними телефонами та іншими електронними пристроями забороняється.

Результати можна дізнатися за тел. 707-52-70 (починаючи з 19 грудня).
Апеляція відбудеться 20 грудня з 15^{00} до 17^{00} в ауд. 6-38.
Умови та розв'язки задач олімпіади можна буде знайти в інтернеті за адресою `http://sites.google.com/site/kharkivolimp/`