

Олімпіада з математики ХФМЛ №27, 2020 р., 10 клас

1. Аня й Таня одночасно, із однієї точки, в одному напрямку побігли по круговій доріжці. Аня пробігає круг за 6 хвилин. Через 15 хвилин після старту вона вперше обігнала Таню. За який час пробігає один круг Таня?

2. У Петрика зовсім закінчилися гроші й він пішов працювати. За договором він працює без вихідних й за кожен день отримує по 100 фартингів. Отримані гроші Петрик почав витрачати. В перший день нової роботи він витратив 1 фартинг, а кожного наступного дня витрачав на 1 фартинг більше, ніж у попередній. В кінці якого дня роботи Петрик знов залишився без грошей? (Кожного дня Петрик отримував гроші в кінці робочого часу, а витрачав гроші після роботи.)

3. Доведіть, що $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{99}{100} < \frac{1}{10}$.

4. На бічній стороні AB рівнобедреного трикутника ABC відмітили точку D , на бічній стороні AC – точку E , а на продовженні основи BC за точку B – точку F таким чином, що $CD = DF$. На прямій DE обрано точку P , а на відрізку BD – точку Q так, що $PF \parallel AC$ і $PQ \parallel CD$. Доведіть, що $DE = QF$.

5. Розв'яжіть рівняння в цілих числах: $x^2(x^2 + 1) = 21^y - 1$.

6. У Шона та Роми є по однаковій стрічці зі 101 клітинки. Фішка може рухатись по стрічці або на будь-яку парну кількість клітин уперед, або на будь-яку непарну кількість клітин назад. Шон спочатку поставив свою фішку на 1-у клітину своєї стрічки, а Рома – на 51-у. Вони хотуть обійти фішками усі клітинки стрічки по одному разу. В кого більша кількість способів це зробити?