

Олімпіада з математики ХФМЛ №27, 2020 р., 9 клас

1. Різниця квадратів коренів квадратного тричлена $x^2 + 9x + q$ дорівнює 45. Знайдіть q .
2. Капітан Гак за час своєї кар'єри здобув 1010 золотих дукатів. Він зібрав команду вірних піратів та рушив на своєму кораблі до Таємничого острова, щоб заховати там свій скарб. Ввечері кожного дня плавання капітан Гак платив кожному зі своїх піратів по одному дукату. На восьмий день плавання пірати атакували іспанську каравелу та пограбували її. Розмір скарбу Гака після цього подвоївся, а кількість піратів вдвічі зменшилася. На 48-й день плавання пірати прибули до Таємничого острова, та Гак заховав у дуже таємничому місці весь свій скарб – рівно 1000 дукатів. Скільки піратів відправилося з Гаком на Таємничий острів?
3. Знайдіть усі трійки цілих чисел (x, y, z) , що є розв'язками системи: $\begin{cases} x - yz = 1; \\ xz + y = 2. \end{cases}$
4. По колу жовтим олівцем написали 49 різних натуральних чисел, менших за 100. Між кожними двома сусідніми жовтими числами синім олівцем записали їх найбільший спільний дільник. Чи могло так статися, що всі сині числа попарно різні?
5. У гострокутному трикутнику ABC проведено висоту AH , медіану BM і бісектрису CD . Відрізки BM і CD перетинаються в точці K . Виявилося, що $KB = KC$. Доведіть, що $KM = KH$.
6. На столі лежать n купок по n сірників, $n \geqslant 2$. З один хід можна взяти один сірник з будь-якої з купок. Двоє гравців роблять ходи по черзі. Якщо не пізніше $(n - 1)^2$ ходу хтось візьме останній сірник з деякої купки, то він перемагає. В іншому випадку – нічия. Чи може хтось із гравців забезпечити собі перемогу незалежно від дій суперника, і якщо так, то хто саме?