

Олимпиада по математике ХФМЛ 27, 2018 г., 11 класс

1. Найдите два решения уравнения

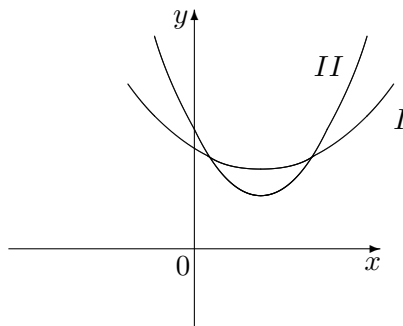
$$\left(\frac{4}{3}\right)^{\cos x} = \sin x,$$

принадлежащие промежутку $(0; 2\pi)$.

2. Из большого кубического куска сыра вырезали и съели кубический кусок поменьше (одна из граней вырезанного куска лежит на грани большого куска). В результате площадь поверхности сыра увеличилась на 24%. На сколько процентов уменьшился его объем?

3. На боковой стороне BC равнобедренного треугольника ABC отмечена точка D , а на продолжении основания AC за точку C – точка E , причем $AD = DE$. Докажите, что площадь треугольника ABD равна площади треугольника BCE .

4. На рисунке даны изображения графиков двух квадратных трехчленов: $f_1(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$ (кривая I) и $f_2(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2$ (кривая II). Сравните b_1 и b_2 .



5. В центральной клетке доски 2019×2019 стоит шахматный король. Саша и Денис по очереди двигают короля (по шахматным правилам), но так, чтобы он не становился на клетку, на которой уже был, и не приближался к начальной клетке (расстоянием между клетками считается расстояние между их центрами). Выигрывает тот, кто первым достигнет края доски. У кого есть выигрышная стратегия, если первый ход делает Саша?

6. Последовательность простых чисел p_1, p_2, \dots строится по следующему принципу. В качестве p_1 и p_2 выбираются произвольные простые числа, и p_{n+2} – наибольший простой делитель числа $p_n + p_{n+1} + 2018$ при $n > 1$. Докажите, что при любом начальном выборе p_1 и p_2 эта последовательность будет содержать конечное число различных членов.