

Олимпиада по математике ХФМЛ 27, 2018 г., 10 класс

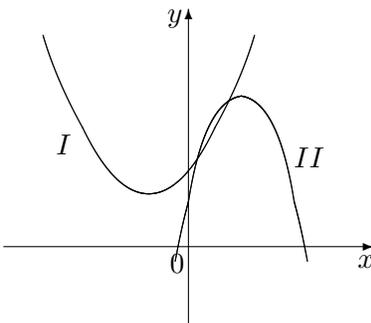
1. Дан прямоугольный треугольник с катетами a , b и гипотенузой c . Докажите, что

$$a^4 + a^2b^2 + b^4 \geq \frac{3}{4}c^4.$$

2. У нумизмата Леша есть коллекция из 66 монет разных стран. Однажды Леша выложил все свои монеты в ряд, причем каждая следующая монета была на 1 грамм тяжелее предыдущей. Первые две монеты золотые, затем идет много медных монет, потом две серебряные, а за ними много бронзовых. Оказалось, что две серебряные монеты весят на 62 грамма больше, чем две золотые, а все бронзовые монеты на 1 кг 169 г тяжелее, чем все медные. Найдите массу первой монеты.

3. На одной улице расположены 5 домов в которых 5, 15, 25, 35, 45 жильцов соответственно. Работники ЖЭКа обнаружили, что у каждого жителя найдется хотя бы две тезки, также проживающие на этой улице. Докажите, что найдутся две тезки, живущие в одном доме.

4. На рисунке даны изображения графиков двух квадратных трехчленов: $f_1(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$ (кривая I) и $f_2(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2$ (кривая II). Сравните b_1 и b_2 .



5. Юра записал десятизначное число, в котором четные и нечетные цифры чередуются. Илья записал число, набор цифр которого совпадает с набором цифр в числе Юры, но записаны они в другом порядке. При этом в числе Ильи также чередуются четные и нечетные цифры. Илья и Юра сложили свои числа и получили одиннадцатизначное число в котором чередуются четные и нечетные цифры. Не ошиблись ли они?

6. Точка M — середина стороны AB квадрата $ABCD$. Точка P — основание перпендикуляра, опущенного из B на прямую CM , а точка N — середина CP . Биссектриса угла DAN пересекает прямую DP в точке Q . Докажите, что четырехугольник $BMQN$ — параллелограмм.