

Олимпиада по математике ХФМЛ 27, 2018 г., 9 класс

1. Квадратный трехчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ с целыми коэффициентами имеет целые корни. Известно, что c – нечетное число. Может ли $f(27)$ также быть нечетным числом?
2. Шарик и Матроскин делают ремонт и хотят выложить площадку перед домом плиткой. Есть три способа покрыть площадку плитками желтого, красного и зеленого цветов. При первом способе понадобится по 100 штук плитки каждого из трех цветов. При втором способе уйдет 150 желтых, 150 красных и 50 зеленых плиток. При третьем способе – 200 желтых, 50 красных и 60 зеленых плиток. Во сколько раз площадь одной зеленой плитки больше площади одной красной?
3. Можно ли из квадрата со стороной 5 см вырезать прямоугольник со сторонами 1 см и 6 см?
4. Числа a , b , c удовлетворяют системе

$$\begin{cases} a(b - c) = a^2bc + 1, \\ b(c - a) = ab^2c + 1. \end{cases}$$

Чему может быть равно число abc^2 ?

5. На боковых сторонах AB и CD трапеции $ABCD$ выбраны точки P и Q соответственно. Отрезки CP и BQ пересекаются в точке T . Оказалось, что вокруг пятиугольника $APTQD$ можно описать окружность. Докажите, что $AT = DT$.
6. В левом нижнем углу доски 1024×1024 стоит шахматный король. Три игрока, Шкипер, Ковальски и Рико, по очереди делают им ходы по шахматным правилам. Начинает Шкипер. Игрок, который поставит короля на клетку, где он уже когда-либо был, проигрывает. Докажите, что Ковальски и Рико могут, договорившись, сделать так, чтобы Шкипер проиграл.