Олимпиада по математике ХФМЛ №27, 2017 г., 11 класс

1. График функции $y = kx + k + 1$ $(k > 0)$, пересекает оси координат в точках A и B. Какова наименьшая возможная площадь треугольника ABO, где O – начало координат?

2. Результат округления числа x "вниз" до ближайшего целого обозначают $\lfloor x \rfloor$, а результат округления "вверх" до ближайшего целого обозначают $\lceil x \rceil$ (например $\lfloor 5,7 \rfloor = 5$, а $\lceil 3,2 \rceil = 4$). Натуральные числа m и n удовлетворяют соотношению $\left\lfloor \frac{217}{m} \right\rfloor + \left\lceil \frac{217}{n} \right\rceil = \left\lceil \frac{217}{m} \right\rceil + \left\lfloor \frac{217}{n} \right\rfloor - 1$. Какие значения может принимать число n?

3. Докажите, что для любого $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ выполнено неравенство

$$1 + \operatorname{tg} x < \frac{1}{1 - \sin x}.$$

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + \dfrac{1}{x} = y^2 + 1, \\ y + \dfrac{1}{y} = z^2 + 1, \\ z + \dfrac{1}{z} = x^2 + 1. \end{cases}$$

5. В равнобедренном треугольнике ABC проведена биссектриса BL. На основании BC выбрана точка D, а на боковой стороне AB – точка E так, что $AE = \frac{1}{2}AL = CD$. Докажите, что $LE = LD$.

6. Каждый из 49 участников летней математической школы Kontora Pi знаком ровно с 24 из остальных. Каждый из участников высказал пожелание по расселению: некоторые сказали, что они хотят жить с кем-нибудь из своих знакомых, а остальные – что они хотят жить с кем-нибудь из незнакомых. Докажите, что можно выгнать одного из участников летней школы, а остальных расселить по двухместным комнатам так, что в каждой комнате хотя бы у одного из участников желание будет удовлетворено.