

Олимпиада по математике ХФМЛ №27, 2017 г., 10 класс

1. Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$y \leq x^2y.$$

2. Есть несколько труб, заливающих воду в бассейн с одинаковой скоростью. Бассейн каждый день наполняется заново. В понедельник несколько труб наполнили бассейн. Во вторник подключили на одну трубу больше, в результате чего бассейн наполнился на 20 минут быстрее. В среду подключили еще на 4 трубы больше, и бассейн наполнился еще на 40 минут быстрее. Сколько труб работало в первый день?

3. Точки A и B расположены на единичном расстоянии друг от друга. Окружности ω_1 и ω_2 единичного радиуса с центрами в A и B соответственно пересекаются в точках C и D . Окружность с центром C , проходящая через точку D , пересекает луч CA в точке F . Луч DF пересекает окружность ω_1 в точке P . Найдите угол APB .

4. В классе учатся n девочек. Каждая из них придумала свою сплетню, причем все сплетни разные. Они начинают посылать друг другу SMS-сообщения. В сообщении девочка передает все сплетни, которые знает (свою собственную и те, которые уже узнала). Докажите, что потребуется не менее $2n - 2$ SMS-сообщений, чтобы все девочки ознакомились со всеми сплетнями.

5. Дано три отрезка, длины которых равны 1 см, 2 см, 3 см. Отрезок длины 3 см разбили на $n > 1$ других отрезков. Докажите, что среди получившихся $n + 2$ отрезков найдутся три, из которых можно сложить треугольник.

6. Существуют ли такие различные натуральные числа a , b и натуральное число n , что

$$\text{НОК}(a + n, b) = \text{НОК}(a, b + n)?$$