Олимпиада по математике ХФМЛ №27, 2017 г., 9 класс

1. Дано 27 чисел. Известно, что произведение всех этих чисел, а также любых четырех из них – положительно. Докажите, что каждое из чисел положительно.

2. Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$|x-y|<1-2x+2y.$$

3. Известно, что положительные числа a, b, c удовлетворяют условию $abc=1$. Найдите значение выражения

$$\frac{1}{1+a+ab}+\frac{1}{1+b+bc}+\frac{1}{1+c+ca}.$$

4. Дан треугольник ABC, в котором $\angle C=90^\circ$. На гипотенузе AB выбраны точки D и E такие, что $AD=AC$ и $BE=BC$. Точки P и Q, лежащие на отрезках AC и BC соответственно, таковы, что $AP=AE$ и $BQ=BD$. Точка M – середина отрезка PQ. Докажите, что M является точкой пересечения биссектрис треугольника ABC.

5. Пусть n – натуральное число. Докажите, что если n^5+n^4+1 имеет ровно 6 натуральных делителей, то n^3-n+1 – точный квадрат.

6. В стране 1000 городов, некоторые из которых соединены дорогами. Известно, что из любого города в любой другой можно добраться по дорогам. Для какого наименьшего k верно следующее утверждение: в любой такой стране можно назначить некоторые k городов *центральными* так, что любой не центральный город будет соединен дорогой хотя бы с одним центральным?