

Олімпіада «Наукові старты», 14.03.2021, 8 клас

1. Старший брат їздить на велосипеді зі швидкістю 25 км/год, молодший – зі швидкістю 20 км/год. Одного разу старший брат поїхав з дому до школи (15 км по велосипедній доріжці), але по дорозі велосипед зламався. Він миттєво зателефонував молодшому братові, і той відразу виїхав до нього на новому велосипеді, після чого зі зламаним велосипедом пішов додому. А старший брат дістався на новому велосипеді до школи, витративши на весь шлях вдвічі більше часу, ніж зазвичай. На скільки хвилин раніше прибув би до школи старший брат, якби відразу від місця поломки велосипеда пішов до школи пішки? Ходить він зі швидкістю 5 км/год.
2. Незнайко має піщаний годинник на 12 хвилин. Опівдні весь пісок був внизу, і Незнайко перевернув годинник. О 12 годині 18 хвилин годинник зупинився. За час роботи годинника Незнайко двічі перевертав його. Один раз це було через 8 хвилин після початку роботи годинника. О котрій годині Незнайко перевертав годинник ще раз?
3. Натуральні числа a та b задовольняють рівність $b^2 = a^2 + ab + b$. Доведіть, що b є квадратом деякого натурального числа.
4. Клітчастий прямокутник 99×100 (99 строк, 100 стовпчиків) розбито на прямокутники 1×3 таким чином, що в кожному стовпчику знаходиться рівно k вертикальних прямокутників. Які значення може мати k ?
5. У трикутнику ABC серединні перпендикуляри до сторін AB і BC перетинають сторону AC у точках P і Q відповідно, причому точка P лежить на відрізку AQ . Доведіть, що описані кола трикутників PBC і QBA перетинаються на бісектрисі кута PBQ .