

Харківська обласна олімпіада з математики, 9 клас, 2021 р.

I тур

1. Перед олімпіадою з математики Дмитро почув діалог Оленки та Миколи про їхні дні народження.

О: «Число та номер місяця моого дня народження вдвічі менші за відповідні число та номер місяця дня народження Миколи.»

М: «Також число, коли народилась Оленка, і номер місяця моого народження є послідовними натуральними числами.»

О: «А сума всіх цих чотирьох чисел кратна 17.»

Чи зможе Дмитро знайти число та місяць народження Оленки?

2. Рома написав на дощі 100 разів кожне з чисел 2018, 2019, 2020. Позначимо через $S(n)$ суму цифр натуральному числа n . За одну дію Рома може обрати довільне натуральне число k і замість будь-яких трьох чисел a, b, c , що написані на дощі, написати числа $2S(a+b)+k$, $2S(b+c)+k$, $2S(a+c)+k$. Чи може Рома за декілька таких дій досягти того, щоб 299 чисел на дощі були рівними, а останнє відрізнялось від них на 1?

3. Нехай $a_n = 1 + \frac{2}{n} - \frac{2}{n^3} - \frac{1}{n^4}$. Для якого найменшого натуральному значення n добуток $P_n = a_2 a_3 a_4 \dots a_n$ більший 100?

4. Задані натуральні число k та не обов'язково різні натуральні числа $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k$. Виявилося, що при будь-якому розфарбуванні усіх натуральних чисел від 1 до 2021 в один із k кольорів так, щоб було рівно a_1 чисел першого кольору, a_2 чисел другого кольору, \dots , a_k чисел k -го кольору, завжди знайдеться таке число $x = \{1, 2, \dots, 2021\}$, що усього чисел, які пофарбовані у колір, що співпадає з кольором числа x , є рівно x . Чому може дорівнювати число k за таких умов?

5. Нехай BM – медіана трикутника ABC , в якому $AB > BC$. Точка P вибрана так, що $AB \parallel PC$ та $PM \perp BM$. На прямій BP обрано точку Q так, що $\angle AQC = 90^\circ$, причому точки B та Q лежать по різні боки від прямої AC . Доведіть, що $AB = BQ$.

II тур

1. Попарно різні дійсні числа a, b, c та d задовольняють умову

$$(a^2 + b^2 - 1)(a + b) = (b^2 + c^2 - 1)(b + c) = (c^2 + d^2 - 1)(c + d).$$

Доведіть, що $a + b + c + d = 0$.

2. Віслючок Іа-Іа має набір зі 100 паличок, довжини яких дорівнюють 2001, 2002, \dots , 2100 мм. Він розламав ці палички таким чином, що усі палички, які в нього тепер є, можна розбити на пари паличок однакової довжини. Доведіть, що Іа-Іа зробив щонайменше 50 розломів (кожну паличку можна ламати декілька разів).

3. Діагоналі паралелограма $ABCD$ перетинаються у точці P . Позначимо через M середину відрізка AB . Точку Q вибрано таким чином, що пряма QA дотикається до описаного кола трикутника MAD , а пряма QB дотикається до описаного кола трикутника MBC . Доведіть, що точки Q, M та P лежать на одній прямій.

4. Знайдіть усі трійки (a, b, c) натуральніх чисел, які задовольняють рівність

$$\text{НСК}(a, b, c) = \frac{ab + bc + ca}{4}.$$