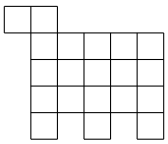
Харківська обласна олімпіада з математики, 7 клас, 2021 р.

I тур

1. Євген рухається на велосипеді з постійною швидкістю в одному напрямку вздовж прямої траси, поруч з якою розташовані дві вежі мобільного зв'язку. Опівдні, коли Євген ще не доїхав до веж, сума відстаней до них дорівнювала 3 км. Через 10 хвилин, коли Євген вже минув обидві вежі, виявилось, що сума відстаней до них знову дорівнює 3 км. З якою швидкістю рухається Євген?

2. Розріжте фігуру (див. рис.) вздовж ліній сітки на п'ять різних за формою фігур з чотирьох клітинок.



3. Знайко задумав чотири різні числа та записав їх на аркуші паперу. Незнайко знайшов цей папірець та став рахувати усі можливі додатні різниці записаних чисел (від більшого числа він віднімав менше). В нього вийшли такі результати: 12, 15, 16, 29, 30, 59. Доведіть, що Незнайко десь помилився.

4. Чи існують такі натуральні числа n, що задовольняють рівність

$$n \cdot S(n) = \underbrace{99 \cdot 99}_{30},$$

де через $S(n)$ позначено суму цифр числа n.

5. Прямокутник 2020×2021 розрізали на фігури, кожна з яких є або фігурою з чотирьох клітин , або фігурою з трьох клітин (фігури можуть бути повернуті та перевернуті). Знайдіть найменшу можливу кількість фігур з трьох клітин, яку могли отримати.

II тур

1. У Тараса та Оксанки в родині є декілька братів та сестер. Їхня мама чекала ще на двійнят. Діти підрахували: якщо народяться хлопчики, то у Тараса буде в x разів більше братів, ніж сестер; якщо народяться дівчинки, то в Оксанки буде в y разів менше сестер, ніж братів. Врешті-решт народилися хлопчик та дівчинка. У скільки разів у новонародженого хлопчика більше братів, ніж сестер, та у скільки разів у новонародженої дівчинки менше сестер, ніж братів?

2. Задано рівнобедрений трикутник ABC, кут при вершині A якого дорівнює $100°$. На сторонах BC та AB трикутника відмічено такі точки M та N, що $BM = BA$ та $BN = CM$. Знайдіть величину кута BNM.

3. У Гвинтика та Шпунтика є три купки по 40 цвяхів у кожній. Вони по черзі (починає Гвинтик) роблять ходи. Один хід полягає у тому, що дві купки об'єднують в одну, а потім ділять її на чотири непорожні купки. Програє той, хто не може зробити хід. Хто з гравців може забезпечити собі виграш?

4. Доведіть, що будь-яке натуральне число з парною сумою цифр можна подати як суму двох доданків з однаковими сумами цифр.