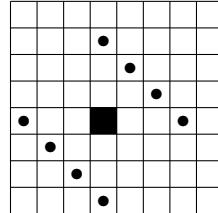


# Харківська обласна олімпіада з математики, 11 клас, 2021 р.

## I тур

1.  $N$  козаків розподілися на 3 групи, щоб обговорити з друзями різні питання. Козак Тарас перейшов від першої групи до другої, козак Андрій перейшов від другої до третьої, козак Остап – з третьої групи до першої. Виявилося, що середній зріст козаків у першій групі зменшився на 8 см, а у другій та третьій групах – збільшився відповідно на 5 см та 8 см. Чому дорівнює  $N$ , якщо відомо, що в першій групі було 9 козаків?

2. Фігура *косий кінь*, що розташована на шахівниці  $8 \times 8$  (чорне поле на рисунку), атакує усі клітини з крапкою. Яку найбільшу кількість таких косих коней можна виставити на шахівницю, щоб вони не атакували один одного?



3. Кола  $\omega_1$  та  $\omega_2$  з центрами в точках  $O_1$  та  $O_2$  перетинаються в точках  $A$  та  $B$ . Побудовано таку точку  $C$ , що  $AO_2CO_1$  – паралелограм. Через точку  $A$  проведено довільну пряму, що вдруге перетинає кола  $\omega_1$  та  $\omega_2$  в точках  $X$  та  $Y$  відповідно. Доведіть, що  $CX = CY$ .

4. Для додатних чисел  $a, b, c$ , сума яких дорівнює  $\frac{3}{2}$ , знайдіть найменше можливе значення виразу  $\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab} + \frac{1}{abc}$ .

5. Визначимо для натуральних  $m, n$  вираз

$$f_n(m) = 1^{2n} + 2^{2n} + 3^{2n} + \dots + m^{2n}.$$

Доведіть, що існує лише скінчenna кількість пар натуральних чисел  $(a, b)$ , для яких число  $f_n(a) + f_n(b)$  – просте.

## II тур

1. Розв'яжіть рівняння  $x^2 + (x+3)\log_2 x = 3x + 18$ .

2. Доведіть, що не існує раціональних чисел  $x, y, z$  таких, що

$$x + y + z = 0 \text{ та } x^2 + y^2 + z^2 = 100.$$

3. У ромбі  $ABCD$  на сторонах  $AB$  і  $AD$  вибрано такі точки  $P$  і  $Q$  відповідно, що відрізок  $PQ$  дотикається до вписаного в ромб кола. Доведіть, що площа трикутника  $CPQ$  не залежить від вибору точок  $P$  і  $Q$ .

4. На 52 картках написані числа від 1 до 52. Будемо вважати, що картка 1 старша за картку 52, а в усіх інших парах старшою є картка з більшим номером. Картки лежать на столі у випадковому порядку числами вниз. За одне питання Ігор може дізнатися старшу картку з будь-якої однієї пари карток. Чи вистачить Ігореві 64 запитання, щоб гарантовано знайти картку з номером 52?