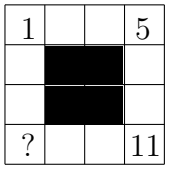
Харківська обласна олімпіада з математики, 10 клас, 2021 р.

I тур

1. Порівняйте числа $\sqrt[9]{9!}$ та $\sqrt[8]{8!}$.

2. Клітинки 1×1, що розташовані по периметру квадрата 4×4, заповнені числами 1, 2,..., 12 таким чином, що суми уздовж кожної з чотирьох сторін рівні. У лівій верхній кутовій клітині стоїть число 1, у правій верхній – число 5, а у правій нижній стоїть число 11 (рисунок). Яке число за таких умов може бути розташованим в останній кутовій клітинці?



3. Кола ω_1 та ω_2 з центрами в точках O_1 та O_2 перетинаються в точках A та B. Побудовано таку точку C, що AO_2CO_1 – паралелограм. Через точку A проведено довільну пряму, що вдруге перетинає кола ω_1 та ω_2 в точках X та Y відповідно. Доведіть, що $CX = CY$.

4. Додатні числа a, b, c задовольняють умову $a^2 + b^2 + c^2 + a + b + c = 6$. Доведіть, що справджується нерівність:

$$2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) \geqslant 3 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

5. Послідовність (a_n) така, що $a_{n+1} = (a_n)^n + n + 1$ для усіх натуральних n, причому a_1 – натуральне. Знайдіть найбільший степінь числа 3, на який ділиться число a_{101}.

II тур

1. Числа $a_1, a_2, \ldots, a_{13}$ утворюють арифметичну прогресію. Відомо, що число $a_1 + 2a_2 + \ldots + 13a_{13}$ є раціональним. Доведіть, що серед чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{13}$ є раціональне.

2. Знайдіть усі натуральні числа N, які мають не менше 4 натуральних дільників, і при цьому сума квадратів 4 найменших натуральних дільників числа N дорівнює N. Відповідь обґрунтуйте.

3. На відрізку AB задано таку точку C, що $AB = 3AC$. Євген побудував паралелограм $ACDE$, причому $AC = DE = CE$. Потім він позначив таку точку Z на відрізку AC, що $\angle AEZ = \angle ACE$. Доведіть, що перпендикуляр, опущений з точки B на пряму EC, перпендикуляр, опущений з точки D на пряму AB та пряма EZ перетинаються в одній точці.

4. Задано натуральне число $n > 2021$. Числа 1, 2, ..., n^2 вписано в комірки таблиці $n \times n$ так, що в кожній комірці написано одне число. Доведіть, що можна позначити n комірок, жодні дві з яких не перебувають в одному рядку або в одному стовпчику, так, щоб жодні чотири числа, які стоять у позначених комірках, не утворювали арифметичну прогресію.