Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Всеукраїнська он-лайн олімпіада найкращих юних математиків України

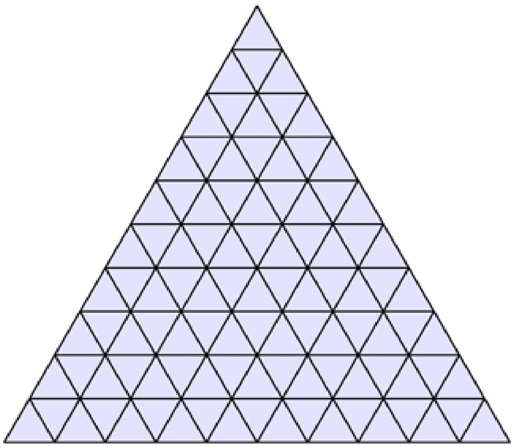
LX Всеукраїнська олімпіада юних математиків

"Мозок – чудовий орган. Він починає працювати з того моменту,
як ти прокинувся, і не зупиняється, доки ти не прийшов на олімпіаду."
Закон Мерфі

Перший день

10 клас

10–1. Для яких натуральних чисел n число n^n+1 ділиться націло на число $n+1$?



10–2. Рівносторонній трикутник зі стороною довжиною n поділений на n^2 маленьких рівносторонніх трикутників зі стороною довжини 1 (рис.). З самого початку один з них, що не має спільних точок з зовнішніми сторонами великого трикутника, пофарбували у синій колір, а решту – у жовтий. За один хід можна вибрати будь-який з n^2 маленьких трикутників і поміняти його колір та кольори сусідніх з ним по стороні трикутників. Чи можна за декілька ходів зробити усю дошку однокольоровою?

10–3. Нехай H_a, H_b, H_c – основи висот, що опущені з відповідних вершин трикутника ABC, H – ортоцентр цього трикутника, а K – точка, що симетрична H відносно прямої BC. Пряма, що проходить через точку H паралельно прямій H_aH_b, перетинає прямі AC та AB у точках X та Y. Доведіть, що описані кола ΔABC та ΔXYK дотикаються.

10–4. Для дійсних чисел a, b, c, d, що задовольняють умову $a+b+c+d=a^2+b^2+c^2+d^2$, доведіть нерівність: $(2-a)(2-b)(2-c)(2-d)\ge 1$.

~~Миколаїв~~ Київ, ~~17 березня~~ 20 липня 2020 р.

На виконання завдання відводиться 4 години
Кожна задача оцінюються в 7 балів

Всеукраїнська он-лайн олімпіада найкращих юних математиків України

LX Всеукраїнська олімпіада юних математиків

"Для людини немає нічого неможливого,
якщо йому не треба робити це самому."
Закон Вейлера:

Другий день

10 клас

10–5. Зростаюча геометрична прогресія з 5 натуральних чисел задовольняє таку умову: квадрат суми другого та четвертого членів у 100 разів більший за суму першого, п'ятого та подвоєного третього члена цієї прогресії. Яке найбільше трицифрове число може бути членом цієї прогресії?

10–6. Дано рівнобедрений трикутник ABC з основою AC, P – довільна точка на цій основі, T – проекція P на BC. У якому відношенні симедіана ΔPBC, що проведена з вершини C, ділить відрізок AT? *Симедіаною* ΔPBC називається такий відрізок CS, $S \in BP$, що промінь CS є симетричним променю медіани CF відносно променя бісектриси CL.

10–7. Шахівницю розбили на фігурки доміно, тобто на прямокутники 1×2 та 2×1. На кожній такій фігурці записали число, що дорівнює кількості фігурок доміно, які мають з нею спільний відрізок, без урахування самої фігурки. Яке найменше значення може приймати сума усіх чисел, що записані на шахівниці?

10–8. Нехай a та b – різні натуральні числа такі, що $a^2+b^2+1 \,\vdots\, 2ab+1$. Доведіть, що $2ab+1$ – точний квадрат цілого числа.

~~Миколаїв~~ Київ, ~~18 березня~~ 21 липня 2020 р.

На виконання завдання відводиться 4 години
Кожна задача оцінюються в 7 балів

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Всеукраїнська он-лайн олімпіада найкращих юних математиків України

LX Всеукраїнська олімпіада юних математиків

"Для людини немає нічого неможливого,
якщо йому не треба робити це самому."
Закон Вейлера:

<u>Другий день</u>

10 клас

10–5. Зростаюча геометрична прогресія з 5 натуральних чисел задовольняє таку умову: квадрат суми другого та четвертого членів у 100 разів більший за суму першого, п'ятого та подвоєного третього члена цієї прогресії. Яке найбільше трицифрове число може бути членом цієї прогресії?

10–6. Дано рівнобедрений трикутник ABC з основою AC, P – довільна точка на цій основі, T – проекція P на BC. У якому відношенні симедіана ΔPBC, що проведена з вершини C, ділить відрізок AT? *Симедіаною* ΔPBC називається такий відрізок CS, $S \in BP$, що промінь CS є симетричним променю медіани CF відносно променя бісектриси CL.

10–7. Шахівницю розбили на фігурки доміно, тобто на прямокутники 1×2 та 2×1. На кожній такій фігурці записали число, що дорівнює кількості фігурок доміно, які мають з нею спільний відрізок, без урахування самої фігурки. Яке найменше значення може приймати сума усіх чисел, що записані на шахівниці?

10–8. Нехай a та b – різні натуральні числа такі, що $a^2+b^2+1 \vdots 2ab+1$. Доведіть, що $2ab+1$ – точний квадрат цілого числа.

~~Миколаїв~~ Київ, ~~18 березня~~ 21 липня 2020 р.

На виконання завдання відводиться 4 години
Кожна задача оцінюються в 7 балів