Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Всеукраїнська он-лайн олімпіада найкращих юних математиків України

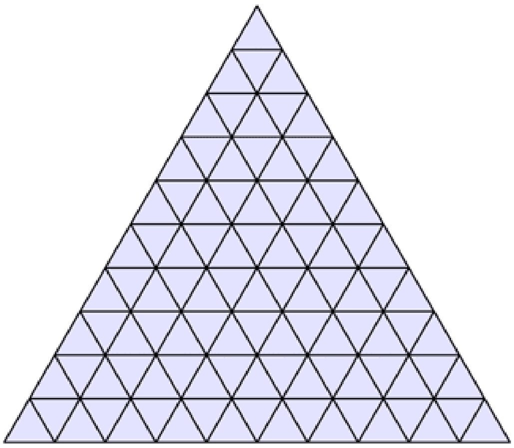
LX Всеукраїнська олімпіада юних математиків

"Мозок – чудовий орган. Він починає працювати з того моменту,
як ти прокинувся, і не зупиняється, доки ти не прийшов на олімпіаду."
Закон Мерфі

Перший день

9 клас

9–1. Яку найбільшу кількість чисел можна вибрати серед чисел $1, 2, \ldots, 2n$ так, щоб довільні два з них мали спільний дільник, більший за 1?



9–2. Рівносторонній трикутник зі стороною довжиною n поділений на n^2 маленьких рівносторонніх трикутників зі стороною довжини 1 (рис.). З самого початку один з них, що не має спільних точок з зовнішніми сторонами великого трикутника, пофарбували у синій колір, а решту – у жовтий. За один хід можна вибрати будь-який з n^2 маленьких трикутників і поміняти його колір та кольори сусідніх з ним по стороні трикутників (з синього на жовтий і навпаки). Чи можна за декілька ходів зробити усю дошку однокольоровою?

9–3. Доведіть, що для будь-якого натурального $n>1$ існує послідовність натуральних чисел $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_m = n$, $m>1$ така, що

$$5(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_m^2)-4(a_1a_2+a_2a_3+\ldots+a_{m-1}a_m) \le 4n^2+\tfrac{1}{2}(m+1).$$

9–4. У трикутнику ABC ортоцентр H – це середина висоти AD, O – центр описаного кола ΔABC. Пряма, що проходить через точку H перпендикулярно до прямої HO перетинає сторони AB та AC ΔABC у точках P та Q відповідно. Доведіть, що середини відрізків BP, CQ та точка O лежать на одній прямій.

~~Миколаїв~~ Київ, ~~17 березня~~ 20 липня 2020 р.

На виконання завдання відводиться 4 години
Кожна задача оцінюються в 7 балів

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Всеукраїнська он-лайн олімпіада найкращих юних математиків України

LX Всеукраїнська олімпіада юних математиків

"Для людини немає нічого неможливого,
якщо йому не треба робити це самому."
Закон Вейлера:

Другий день

9 клас

9–5. Для натуральних чисел $a \geq b \geq c \geq d$ доведіть нерівність:

$$ab + bc + cd - b^2 - c^2 - d^2 \geq a - d\ .$$

9–6. Нехай чотирикутник $ABCD$ описано навколо кола з центром у точці O. На променях AB, AD, CB та CD відклали рівні відрізки AA_1, AA_2, CC_1 та CC_2, довжина яких більша за довжину будь-якої зі сторін чотирикутника $ABCD$ Виявилось, що точки A_1, A_2, C_1 та C_2 лежать на одному колі з центром у точці O. Доведіть, що прямі A_1A_2, C_1C_2 та BD перетинаються в одній точці або паралельні.

9–7. Є 4 країни, в кожній з яких є декілька міст. Між містами будь-яких двох різних країн прокладено не менше ніж $\frac{5}{6}$ від загальної можливої кількості доріг між цими країнами. Доведіть, що з кожної країни можна вибрати по місту так, що між будь-якими двома містами з цих чотирьох прокладена дорога. Між будь-якими двома містами можна прокласти не більше однієї дороги.

9–8. Чи існують множини з попарно різних натуральних чисел $(a_1, a_2, ..., a_n)$, $n > 1$, для яких справджується умова:

$$(a_1 + 1)! + (a_2 + 1)! + ... + (a_n + 1)! \vdots a_1! + a_2! + ... + a_n!\,.$$

~~Миколаїв~~ Київ, ~~18 березня~~ 21 липня 2020 р.

На виконання завдання відводиться 4 години
Кожна задача оцінюються в 7 балів

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Всеукраїнська он-лайн олімпіада найкращих юних математиків України

LX Всеукраїнська олімпіада юних математиків

"Для людини немає нічого неможливого,
якщо йому не треба робити це самому."
Закон Вейлера:

Другий день

9 клас

9–5. Для натуральних чисел $a \ge b \ge c \ge d$ доведіть нерівність:

$$ab + bc + cd - b^2 - c^2 - d^2 \ge a - d\,.$$

9–6. Нехай чотирикутник $ABCD$ описано навколо кола з центром у точці O. На променях AB, AD, CB та CD відклали рівні відрізки AA_1, AA_2, CC_1 та CC_2, довжина яких більша за довжину будь-якої зі сторін чотирикутника $ABCD$ Виявилось, що точки A_1, A_2, C_1 та C_2 лежать на одному колі з центром у точці O. Доведіть, що прямі A_1A_2, C_1C_2 та BD перетинаються в одній точці або паралельні.

9–7. Є 4 країни, в кожній з яких є декілька міст. Між містами будь-яких двох різних країн прокладено не менше ніж $\frac{5}{6}$ від загальної можливої кількості доріг між цими країнами. Доведіть, що з кожної країни можна вибрати по місту так, що між будь-якими двома містами з цих чотирьох прокладена дорога. Між будь-якими двома містами можна прокласти не більше однієї дороги.

9–8. Чи існують множини з попарно різних натуральних чисел $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $n > 1$, для яких справджується умова:

$$(a_1 + 1)! + (a_2 + 1)! + \ldots + (a_n + 1)! \,\vdots\, a_1! + a_2! + \ldots + a_n!\,.$$

~~Миколаїв~~ Київ, ~~18 березня~~ 21 липня 2020 р.

На виконання завдання відводиться 4 години
Кожна задача оцінюються в 7 балів