

**Всеукраїнська он-лайн олімпіада  
найкращих юних математиків України**

**LX Всеукраїнська олімпіада юних математиків**

*"Мозок – чудовий орган. Він починає працювати з того моменту,  
як ти прокинувся, і не зупиняється, доки ти не прийшов на олімпіаду."  
Закон Мерфі*

Перший день

**8 клас**

**8–1.** Яку найменшу кількість чисел можна викреслити серед перших 100 натуральних чисел, щоб добуток решти чисел не ділився націло на 250?

**8–2.** Вісім незнайомих один з одним дітей прийшли на перше заняття з танців. Щоб вони якнайшвидше познайомилися, вчителька вирішила по черзі вибирати деяких чотирьох з них, які під мелодію водитимуть хоровод протягом хвилини. За цю хвилину кожна дитина в хороводі знайомиться з тими двома, з якими тримається за руку. Яка найменша кількість часу (хвилин) знадобиться вчительці, щоб познайомити один з одним усіх 8 дітей?

**8–3. а)** Відомо, що для ненульових цілих чисел  $a, b, c$  справджується

умова:  $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} = \frac{a^2}{c} + \frac{c^2}{b} + \frac{b^2}{a}$ . Чи обов'язково має справджуватися

рівність:  $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a}$ ?

**б)** Розглянемо усі трійки ненульових цілих чисел  $(a, b, c)$ , кожне з яких знаходиться в межах від  $-2020$  до  $2020$  включно. З'ясуйте, для скількох з

них умови  $a+b+c=0$  та  $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} = \frac{a^2}{c} + \frac{c^2}{b} + \frac{b^2}{a}$  рівносильні, тобто для скількох таких трійок чисел  $(a, b, c)$  ці твердження справджуються чи не справджуються одночасно?

**8–4.** В трикутнику  $ABC$   $\angle A = 75^\circ$  та  $\angle C = 45^\circ$ . На сторонах  $AB$  та  $BC$  вибрали точки  $P$  та  $T$  відповідно так, що чотирикутник  $APTC$  вписаний і  $CT = 2AP$ . Точка  $O$  – центр описаного кола  $\triangle ABC$ . Промінь  $TO$  перетинає сторону  $AC$  у точці  $K$ . Доведіть, що  $TO = OK$ .

Миколаїв Київ, 17 березня 20 липня 2020 р.

**Всеукраїнська он-лайн олімпіада  
найкращих юних математиків України**

**LX Всеукраїнська олімпіада юних математиків**

*"Для людини немає нічого неможливого,  
якщо йому не треба робити це самому."  
Закон Вейлера:*

Другий день

**8 клас**

**8–5.** Нехай  $a, b, c$  – довільні ненульові числа. Визначимо такі величини:  $A = \frac{a^2+b^2}{c^2}$ ,  $B = \frac{b^2+c^2}{a^2}$ ,  $C = \frac{c^2+a^2}{b^2}$ , а також  $P = A \cdot B \cdot C$  та  $S = A + B + C$ . Які значення може приймати вираз  $P - S$ ?

**8–6.** На площині вибрані  $2n$  точок. Доведіть, що можна розбити їх на  $n$  пар таким чином, щоб виконувалась наступна умова: якщо на двох точках з кожної пари побудувати круг, як на діаметрі, то в отриманих  $n$  кругів буде деяка спільна точка, не обов'язково серед вибраних.

**8–7.** Пару натуральних чисел  $(a, b)$  назвемо *цікавою*, якщо існує таке натуральне  $n$ , що мінімальний простий дільник числа  $a + n$  дорівнює максимальному простому дільнику числа  $b + n$ . Знайдіть усі цікаві пари натуральних чисел.

**8–8.** На дошці, що складається з  $2020 \times 2020$  комірок (клітин), Андрій та Олеся грають у гру за такими правилами. Спочатку Олеся вибирає «фінальну комірку», після цього Андрій вибирає «початкову комірку», що не має спільних точок з фінальною. Далі Андрій та Олеся по черзі (розпочинає Андрій з обраної ним початкової комірки) фарбують комірки дошки в блакитний (Андрій) та жовтий (Олеся) кольори за такими правилами. Кожний своїм черговим ходом має фарбувати клітину, що має спільну сторону чи вершину із клітиною зафарбованою супротивником на попередньому ході і яка не була раніше зафарбована в жодний з кольорів. Перемагає той, хто зафарбує своїм ходом фінальну комірку, або якщо виникне ситуація, за якої супротивник не може зробити за правилами черговий хід.

*а)* Які комірки може вибрати Олеся в якості фінальних, щоб напевно перемогти, не залежно від того, яку комірку в якості початкової оберє Андрій?

*б)* Для яких комірок, які може вибрати Олеся в якості фінальних, у Андрія існує можливість вибрати початкову комірку таким чином, щоб перемогти самому?

Миколаїв Київ, 18 березня 21 липня 2020 р.