Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Всеукраїнська он-лайн олімпіада найкращих юних математиків України

LX Всеукраїнська олімпіада юних математиків

"Мозок – чудовий орган. Він починає працювати з того моменту, як ти прокинувся, і не зупиняється, доки ти не прийшов на олімпіаду."
Закон Мерфі

Перший день

11 клас

11–1. Нехай $a_1 < a_2 < \ldots < a_k$ – деякі натуральні числа. Для кожного a_i Заріна виписала в зошит усі натуральні дільники a_i (деякі числа можуть повторюватися). Далі Маруся розбила усі виписані Заріною числа на декілька груп. Виявилось, що числа в кожній з груп утворюють повний набір дільників деякого числа, які Маруся вирішила потім виписати на дошку. Доведіть, що на дошці виписані числа $a_1, a_2, \ldots, a_k$.

11–2. У школі кожен учень дружить не більше ніж з n учнями цієї школи. Натуральні числа a та b такі, що $a+b=n-1$. Доведіть, що учнів можна розділити на дві групи A і B таким чином, що кожен учень групи A має не більше ніж a друзів серед учнів групи A, а кожен учень групи B має не більше ніж b друзів серед учнів групи B.

11–3. Знайдіть усі функції $f: R \to R$, для яких для довільних дійсних $x,\ y \in R$ справджується рівність:

$$(x+y)f(x+y) = (f(f(x)+f(y)))^2.$$

11–4. Нехай ABC гострокутний не рівнобедрений трикутник. Його бісектриси AL_1 та BL_2 перетинаються в точці I. Точки D та E вибираються на відрізках AL_1 та BL_2 відповідно таким чином, що $\angle DBC = \frac{1}{2}\angle A$ та $\angle EAC = \frac{1}{2}\angle B$. Прямі AE та BD перетинаються в точці P. Точка K – симетрична точці I відносно прямої DE. Доведіть, що прямі KP та DE перетинаються на описаному колі ΔABC.

~~Миколаїв~~ Київ, ~~17 березня~~ 20 липня 2020 р.

На виконання завдання відводиться 4 години
Кожна задача оцінюються в 7 балів

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Всеукраїнська он-лайн олімпіада найкращих юних математиків України

LX Всеукраїнська олімпіада юних математиків

"Для людини немає нічого неможливого,
якщо йому не треба робити це самому."
Закон Вейлера:

Другий день

11 клас

11–5. Дано рівнобедрений трикутник ABC з основою AC, P – довільна точка на цій основі, T – проекція P на BC. У якому відношенні симедіана ΔPBC, що проведена з вершини C, ділить відрізок AT? *Симедіаною* ΔPBC називається такий відрізок CS, $S \in BP$, що промінь CS є симетричним променю медіани CF відносно променю бісектриси CL.

11–6. Паліндромом називається число, у якого запис цифр симетричний відносно середини, наприклад 7, 1221 та 57575 – паліндроми, а 1212 та 3330 – ні. Доведіть, що для будь-якої кількості попарно різних паліндромів сума обернених до них чисел не перевищує 11.

11–7. Для деяких цілих невід'ємних m, n рівняння $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_m}-\frac{1}{y_1}-\frac{1}{y_2}-\ldots-\frac{1}{y_n}=\frac{577}{408}$ має нескінченно багато розв'язків в натуральних числах $x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_n$. Доведіть, що рівняння $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_k}-\frac{1}{y_1}-\frac{1}{y_2}-\ldots-\frac{1}{y_l}=\frac{577}{408}$ має розв'язок в натуральних числах $x_1, x_2, \ldots, x_k, y_1, y_2, \ldots, y_l$ для деяких цілих невід'ємних $k < m$ та $l < n$.

11–8. В вершинах правильного n-кутника $A_1A_2\ldots A_n$, $n \ge 6$ з центром у точці O, треба розставити натуральні числа a_1, a_2, …, a_n, не усі однакові, таким чином, щоб для кожної вершини A_i існували дві вершини A_k та A_l, що симетричні відносно прямої OA_i, для яких справджується рівність: $a_i = \frac{1}{2}(a_k + a_l)$.

~~Миколаїв~~ Київ, ~~18 березня~~ 21 липня 2020 р.

На виконання завдання відводиться 4 години
Кожна задача оцінюються в 7 балів