LIX Всеукраїнська олімпіада юних математиків

12 березня 2019 р. 9 клас. 1 тур

1. Задане натуральне число $n > 1$. По колу розставлені 2019 натуральних чисел. Відомо, що добуток будь-яких двох сусідніх з них є точним n-м степенем деякого натурального числа. Чи обов'язково й добуток будь-яких двох (не обов'язково сусідніх) з цих чисел також є точним n-м степенем натурального числа?

2. Нехай точка M – середина гіпотенузи AB прямокутного трикутника ABC. Серединний перпендикуляр до гіпотенузи AB перетинає катет BC у точці K. Перпендикуляр, що проведений до прямої CM із точки K, перетинає продовження відрізку AC за точку A в точці P. Прямі CM і BP перетинаються в точці T. Доведіть, що $AC = TB$.

3. В компанії людей немає трьох попарно знайомих між собою, а серед будь-яких п'яти знайдуться троє, які мають спільного знайомого. Доведіть, що людей можна розбити на дві групи попарно незнайомих людей.

4. На дошці записаний многочлен x^2+1. Кожного дня Катя витирає записаний на дошці многочлен $F(x)$ та записує замість нього один з двох многочленів: $F^2(x)+1$ або $F(x^2+1)$. Доведіть, що через рік вільний член многочлена, що записаний на дошці, буде більше, ніж $2^{2^{222}}$.

LIX Всеукраїнська олімпіада юних математиків

13 березня 2019 р. 9 клас. 2 тур

5. На дошці записані натуральні числа $a < b$. На кожному кроці два записані на дошці числа витирають, а замість них записують їх суму та модуль різниці. В деякий момент на дошці з'явилося записаним число 2019. При якому найменшому можливому b це можливо?

6. Доведіть, що для довільних дійсних x, y, z справджується нерівність:

$$x^2\left(3y^2+3z^2-2yz\right) \geqslant yz\left(2xy+2xz-yz\right).$$

Для яких трійок може досягатися рівність?

7. Задані натуральні числа a, b, c. Доведіть, що існує таке ціле невід'ємне число k, для якого НСД$(a^k+bc, b^k+ac, c^k+ab) > 1$.

8. Гострокутний трикутник ABC вписано в коло ω з центром у точці O. Продовження його висот, що проведені з вершин A та C, вдруге перетинають ω в точках A_0 та C_0 відповідно. Пряма A_0C_0 перетинає сторони AB та BC у точках A_1 та C_1 відповідно. Точки A_2 та C_2 на стороні AC такі, що $A_2O \parallel BC$, а $C_2O \parallel AB$. Нехай H – ортоцентр $\triangle ABC$, T – точка перетину A_1A_2 і C_1C_2. Доведіть, що $HT \parallel AC$.