LIX Всеукраїнська олімпіада юних математиків

12 березня 2019 р. 11 клас. 1 тур

1. Чи існують цілі числа $a < b < c < d$, для яких справджується рівність:

$$\frac{a}{a} + \frac{a}{b} + \frac{a}{c} + \frac{a}{d} = \frac{b}{a} + \frac{b}{b} + \frac{b}{c} + \frac{b}{d}?$$

2. На початку гри ігрове поле – це прямокутник $2 \times 2n$. Олеся та Андрій по черзі (розпочинає Олеся) роблять такі ходи – кожний з них від поточного ігрового поля відрізають квадрат розміру 1×1 або 2×2 за умови, що їх можна вирізати з ігрового поля на цей момент і після його відрізання ігрове поле залишиться зв'язним по стороні, тобто з будь-кого поля на будь-яке інше можна дістатися ходами шахової тури. Виграє той, хто відріже останній квадратик ігрового поля. Хто переможе в цій грі, за умови що усі хочуть виграти?

3. Задані різні натуральні числа a та b, більші від 1.
а) Доведіть, що для нескінченної кількості натуральних n число $s_n = a^n + b^{n+1}$ є складеним.
б) Доведіть, що існує нескінченно багато простих p таких, що s_n ділиться на p при деякому натуральному n.

4. На колі з діаметром AD взято точки B і C так, що $AB = AC$. На відрізку BC обрано точку P довільним чином, а точки M і N на відрізках AB і AC відповідно так, що чотирикутник $PMAN$ є паралелограмом. Нехай PL – бісектриса трикутника MPN. Пряма PD перетинає MN у точці Q. Доведіть, що точки B, Q, L та C лежать на одному колі.

LIX Всеукраїнська олімпіада юних математиків

13 березня 2019 р. 11 клас. 2 тур

5. Знайдіть усі натуральні числа a, b та c, для яких число $2^{a!}+2^{b!}+2^{c!}$ є кубом натурального числа.

6. На колі розставлені 2019 точок A_1, A_2,..., A_{2019}, що утворюють правильний 2019-кутник $A_1A_2\dots A_{2019}$. Олеся та Андрій по черзі роблять ходи, першою ходить Олеся. За певними правилами Олеся своїм ходом утворює тупокутний трикутник, а Андрій – гострокутний. Правила утворення трикутників такі. На початку *відміченими* вважаються вершини A_1 та A_2. На першому своєму кроці Олеся відмічає невідмічену вершину A_i так, щоб утворився тупокутний $\triangle A_1A_2A_i$, і вершина A_i стає відміченою. Нехай надалі своїм черговим ходом Олеся (Андрій) відмітили не відмічену раніше вершину A_j утворили тупокутний (гострокутний) $\triangle A_kA_lA_j$. Тоді наступним ходом Андрій (Олеся) може відмітити таку не відмічену вершину A_m, для якої утворюється гострокутний (тупокутний) $\triangle A_nA_jA_m$, де $n=k$ або $n=l$. Програє той, хто не зможе за правилами зробити черговий хід, тобто відмітити вершину, щоб утворився належний трикутник. Хто переможе за правильної гри обох учасників?

7. Знайдіть всі функції $f:(0;+\infty)\to(0;+\infty)$ для яких для довільних додатних чисел x, y справджується рівність:

$$f(f(x)+y)=f(f(x))+2yf(x)-f(y)+2y^2+1.$$

8. Є група з $2n$ людей, серед яких є пари знайомих. Відомо, що кожна людина серед цієї групи має рівно $k\geqslant 1$ знайомих (якщо “А” знайомий з “Б”, то й навпаки, “Б” знайомий з “А”). Для яких k цю групу завжди можна розбити на дві підгрупи по n людей таким чином, щоб у обох підгрупах кожна людина мала принаймні одного знайомого?