LIX Всеукраїнська олімпіада юних математиків

12 березня 2019 р. 10 клас. 1 тур

1. З натуральних чисел 2, 3, 4, …, 2019 якимось чином утворюють 1009 правильних дробів, далі серед цих дробів вибирають найбільший. Яке найменше значення може мати цей найбільший дріб при усіх можливих побудовах таких дробів?

2. Андрій та Олеся по черзі вирізають по лініях сітки з прямокутника 4000×2019 квадрати якихось розмірів. Після ходу кожного обов'язково має залишитися *зв'язна* фігура. Програє той, хто не може зробити хід. Хто виграє за правильної гри обох гравців, якщо розпочинає Олеся? *Фігура називається зв'язною, якщо з будь-якої її клітини можна дістатися будь-якої іншої, ходячи через сторони інших клітинок фігури.*

3. В гострокутному трикутнику ABC вписане коло з центром у точці I дотикається до сторін AB та BC у точках C_1 та A_1 відповідно. Нехай M – середина AC, N – середина дуги ABC описаного кола трикутника ABC, P – проекція точки M на A_1C_1. Доведіть, що точки I, P та N лежать на одній прямій.

4. Задані різні натуральні числа a та b, більші від 1.
а) Доведіть, що для нескінченної кількості натуральних n число $s_n = a^n + b^{n+1}$ є складеним.
б) Доведіть, що існує нескінченно багато простих p таких, що s_n ділиться на p при деякому натуральному n.

LIX Всеукраїнська олімпіада юних математиків

13 березня 2019 р. 10 клас. 2 тур

5. Знайдіть усі натуральні числа a та b, для яких число $2^{a!} + 2^{b!}$ є кубом натурального числа.

6. Дано паралелограм $ABCD$. Коло, що проходить через вершини A та D вдруге перетинає прямі AB, BD, AC та CD у точках B_1, B_2, C_1 та C_2 відповідно. Прямі B_1B_2 та C_1C_2 перетинаються в точці K. Доведіть, що точка K рівновіддалена від прямих AB та CD.

7. У країні уряд вирішив встановити транспортне сполучення між містами залізницею або авіасполученням таким чином, щоб з кожного міста можна було безпосередньо дістатися не більше як до чотирьох інших міст. Доведіть, що уряд завжди може вибрати тип сполучення відповідних пар міст таким чином, щоб не існувало трьох міст, кожні два з яких з'єднані одним видом транспорту.

8. Для додатних чисел x, y, z, що задовольняють рівності $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=3$, доведіть, що справджується нерівність:

$$(x-1)(y-1)(z-1) \leqslant \frac{1}{4}(xyz-1).$$