Міністерство освіти і науки України
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Інститут модернізації змісту освіти

LVIII Всеукраїнська олімпіада юних математиків

Перший день

9 клас

9–1. В олімпіаді взяли участь 60 учасників. Їм було запропоновано 8 задач, кожна з яких оцінювалась від 0 до 7 балів. Доведіть, що у підсумку обов'язково буде 3 учасники, чиї резільтати попарно відрізняються не більше ніж у 1 бал. Чи справджувалось би твердження задачі, якби в олімпіаді взяли участь 58 учасників?
Результат учасника на олімпіаді – це загальна кількість набраних ним балів.

9–2. Андрій за квітень прочитав товсту книгу. Він читав книгу за таким графіком: з 1 по 20 квітня він прочитував в середньому по 20 сторінок в день, з 6 по 25 квітня він прочитував в середньому по 30 сторінок в день, а з 11 по 30 квітня він прочитував в середньому по 40 сторінок в день. Яку максимальну та мінімильну кількість сторінок могла мати ця книга?

9–3. У гострокутному трикутнику ABC бісектриса кута A перетинає описане навколо цього трикутника коло в точці W. З точки W на пряму AB опустили перпендикуляр WU, а з центра вписаного кола I цього ж трикутника опустили перпендикуляр IP на пряму WU. Нехай M – середина відрізка BC. Доведіть, що пряма MP проходить через середину відрізка CI.

9–4. Дільники складеного натурального числа n, яке не є квадратом простого числа, позначимо в порядку зростання таким чином: $1 < d_1 < d_2 < \ldots < d_{l-1} < d_l < n$, $l \geq 2$. Для яких n існують натуральні числа a, b та N, що задовольняють такі умови: $d_1 + d_2 = N^a$ та $d_{l-1} + d_l = N^b$?

Одеса, 20 березня 2018 р.

На виконання завдання відводиться 4 години
Кожна задача оцінюється в 7 балів

Міністерство освіти і науки України
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Інститут модернізації змісту освіти

LVIII Всеукраїнська олімпіада юних математиків

Другий день

9 клас

9–5. Для натурального числа n позначимо через $S(n)$ суму його цифр. Серед усіх пар натуральних чисел (n, m), що задовольняють рівність $S(n)\cdot S(n+1)\cdot\ldots\cdot S(n+m)=2018$, знайдіть таку, для якої сума $n+m$ приймає найменше можливе значення.

9–6. В трикутнику ABC позначили точки M_1, M_2, M_3 – середини сторін BC, AC, AB відповідно. Точка K симетрична до M_2 відносно прямої BC, AH – висота трикутника ABC. Доведіть, що пряма KM_3 ділить навпіл відрізок HM_1.

9–7. Для додатних чисел x, y, z доведіть нерівність:

$$\tfrac{1}{3}(x^3+y^3+z^3)\geq xyz+\tfrac{2}{9}(x+y+z)(x-z)^2.$$

9–8. Кругла башта має 16 дверей, за кожною з яких схована скриня з золотом капітана Флінта. Ці двері розташовані по периметру башти на рівних відстанях між сусідніми, та занумеровані за рухом годинникової стрілки числами від 1 до 16. До башти підійшли 16 піратів, кожен з яких має один ключ, причому всі ключі занумеровані числами від 1 до 16. Відомо, що ключ з номером n відкриває двері з номером m тоді і тільки тоді, коли $m \vdots n$. Пірати стоять рівно по одному у кожної двері, але вони не знають номера двері, біля якої вони опинилися. Джим Хокінс знає у якого пірата який ключ і хоче, щоб ті змогли забрати якомога меншу кількість скринь з золотом. Джим може повернути башту так, щоб двері перед піратами були розташовані так, як він того бажає – але все одно номери дверей йдуть послідовно по колу за рухом годинникової стрілки $1-16$ починаючи з деякої. Яку максимальну кількість скринь із золотом зможуть напевно забрати пірати за таких умов?

Одеса, 21 березня 2018 р.

На виконання завдання відводиться 4 години
Кожна задача оцінюється в 7 балів