

**Відбір на Всеукраїнську олімпіаду з математики. 2020 рік. 9 клас. Додатковий тур**

1. Знайдіть усі пари цілих чисел  $(m, n)$ , що задовольняють рівність  $m^5 - n^5 = 16mn$ .
2. Додатні числа  $x, y, z$  задовольняють рівність  $x^5 + y^5 + z^5 = xy + yz + zx$ . Доведіть, що

$$x^2y + y^2z + z^2x \leq 3.$$

3. Яку найбільшу кількість тур можна поставити на дошку  $n \times n$  так, щоб для будь-яких двох тур існувало порожнє поле, яке вони обидві б'ють? Тура не б'є поле, якщо між турою та полем стоїть деяка інша тура.
4. У трикутника  $ABC$  вписане коло з центром у точці  $I$  дотикається сторін  $BC$ ,  $AC$  та  $AB$  у точках  $D$ ,  $E$  та  $F$  відповідно. Пряма  $AI$  перетинає  $DE$  та  $DF$  у точках  $P$  та  $Q$ . Доведіть, що середина сторони  $BC$  є центром описаного кола трикутника  $DPQ$ .