

Відбір на Всеукраїнську олімпіаду з математики. 2020 рік. 8 клас. Додатковий тур

1. Розв'яжіть рівняння:

$$(1 + x + x^2)(1 + x + x^2 + \dots + x^{4038}) = (1 + x + x^2 + \dots + x^{2020})^2.$$

2. У гострокутному трикутнику ABC провели висоти AH і BY . Перпендикуляри до прямої XY , які проведено через точки X і Y , перетинають сторону AB в точках M і N відповідно. Доведіть, що $AN = MB$.

3. Дано порожню таблицю 1000×1000 . Олексій та Євген грають у таку гру. Вони по черзі, починаючи з Олексія, заповнюють таблицю цифрами. За хід гравець обирає один стовпчик і записує в верхню з його порожніх клітин будь-яку ненульову цифру на свій вибір. Після заповнення таблиці в кожному рядку й у кожному стовпчику буде по одному тисячецифровому числу (числа читаються зліва направо і зверху вниз). Олексій перемагає, якщо принаймні два з цих 2000 чисел є простими, в протилежному випадку перемагає Євген. Хто з них може забезпечити собі перемогу незалежно від дій суперника?

4. Натуральні числа a та b такі, що $a^2 + b^2 - a$ ділиться на $2ab$. Доведіть, що число a є точним квадратом.