

Відбір на Всеукраїнську олімпіаду з математики. 2020 рік. 9 клас. 3 тур

1. Клітинки дошки розміром 5×5 пофарбовані у п'ять кольорів. Кожна клітинка фарбується лише в один колір, у кожен колір пофарбовано рівно п'ять клітинок. Доведіть, що обов'язково знайдеться рядок або стовпчик, клітинки якого пофарбовано принаймні у три різні кольори.
2. Знайдіть усі натуральні числа, які мають хоча б два різні власні дільники та які кратні різниці будь-яких двох своїх різних власних дільників. *Власним дільником натурального числа n називається натуральний дільник, що відмінний від 1 і n .*
3. Задано трикутник ABC . Різні точки D , E та F належать сторонам BC , AC та AB відповідно, причому чотирикутники $ABDE$ та $ACDF$ є вписаними. Пряма AD вдруге перетинає описане коло трикутника ABC у точці P . Точка Q симетрична точці P відносно BC . Доведіть, що Q належить описаному колу трикутника AEF .
4. Про дійсні числа $a, c > 0$ та $b < 0$ відомо, що квадратний тричлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ не має дійсних коренів. Доведіть, що існує таке натуральне число k , що всі коефіцієнти многочлена

$$P(x) = (x + 1)^k f(x)$$

додатні.