

### Відбір на Всеукраїнську олімпіаду з математики. 2020 рік. 8 клас. 3 тур

1. У шаховому турнірі в одне коло кожен учасник виграв білими стільки ж партій, скільки всі інші в сумі виграли чорними. Чи вірно, що в усіх учасників однакова кількість перемог?
2. Прості числа  $p$  та  $q$  такі, що  $p^2 + pq + q^2$  є точним квадратом. Доведіть, що число  $p^2 - pq + q^2$  є простим.
3. Додатні числа  $a, b, c$  та  $d$  задовольняють рівності  $1 + a^2 = c^2$  та  $b^2 + d^2 = 1$ . Доведіть нерівність  $c + d \leq \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ .
4. Задано гострокутний трикутник  $ABC$ . На продовженнях сторони  $BC$  відмічено такі точки: на продовженні за точку  $B$  відмічено точку  $P$ , а на продовженні за точку  $C$  – точку  $Q$ , причому  $AB = BP$ ,  $AC = CQ$ . Коло  $\omega$  з центром  $O$  є зовнівписаним для трикутника  $ABC$ , воно дотикається продовжень сторін  $AB$  та  $AC$  в точках  $D$  та  $E$  відповідно. Промені  $PD$  та  $QE$  перетинаються в точці  $T$  (точка  $D$  лежить на відрізку  $PT$ , точка  $E$  лежить на відрізку  $QT$ ). Доведіть, що  $\angle ATO = 90^\circ$ .