

**Відбір на Всеукраїнську олімпіаду з математики. 2020 рік. 11 клас. 3 тур**

1. Знайдіть усі натуральні числа  $n$ , для яких знайдеться просте число  $p$  таке, що  $p^n - (p-1)^n$  дорівнює натуральному степеню трійки.
2. У шаховому турнірі взяли участь 2020 школярів, кожні двоє з яких зіграли один з одним не більше одного матча. Після завершення турніру виявилось, що серед будь-яких двох школярів, що грали один з одним, хоча б один з них провів не більше 22 матчів. Яка найбільша кількість матчів могла бути проведена на цьому турнірі?
3. Знайдіть усі такі функції  $f : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ , що  $f(xf(y) + f(x)) = yf(x) + x$  для будь-яких додатних  $x$  та  $y$ .
4. Дотична  $\ell$  до описаного кола гострокутного трикутника  $ABC$  перетинає прямі  $AB$ ,  $BC$  та  $CA$  у точках  $C'$ ,  $A'$  та  $B'$ . Позначимо за  $H$  ортоцентр трикутника  $ABC$ . На прямих  $A'H$ ,  $B'H$  та  $C'H$  відповідно відмічено точки  $A_1$ ,  $B_1$  та  $C_1$  (відмінні від  $H$ ) такі, що  $AH = AA_1$ ,  $BH = BB_1$  та  $CH = CC_1$ . Доведіть, що описані кола трикутників  $ABC$  та  $A_1B_1C_1$  дотикаються одне одного.