

**Відбір на Всеукраїнську олімпіаду з математики. 2020 рік. 10 клас. 3 тур**

1. У гострокутному трикутнику  $ABC$ , в якому  $AC \neq BC$ , проведено висоту  $CK$  та відмічено центр описаного кола  $O$ . Доведіть, що площі чотирикутників  $AKOC$  та  $BKOC$  рівні.
2. Для натурального числа  $n$  знайшлося таке натуральне число  $k$ , що для будь-якого натурального дільника  $d$  числа  $n$ ,  $n$  ділиться на  $d - k$ . Знайдіть усі такі числа  $n$ .
3. Дано натуральні числа  $n$  і  $k$ . На вечірку прийшли  $n$  гостей, деякі з них знайомі один з одним. Виявилось, що на вечірці в кожного гостя не більше  $2k$  знайомих, але в кожних двох гостей, які не знайомі один з одним, не менше  $k$  спільних знайомих. Доведіть, що  $n \leq 6k$ .
4. Дійсні числа  $a, b, c$  задовольняють умови  $0 \leq a \leq b \leq c$  та  $a + b + c = ab + bc + ca > 0$ . Доведіть, що  $\sqrt{bc}(a + 1) \geq 2$ , та визначте, коли в цій нерівності досягається рівність.