

Відбір на Всеукраїнську олімпіаду з математики. 2020 рік. 9 клас. 2 тур

1. Точка O – центр описаного кола трикутника ABC . Нехай точка P симетрична точці O відносно сторони AB , а M та N – середини відрізків AO та CP відповідно. Доведіть, що $MN \perp BC$.
2. Ненульові дійсні числа a , b та c такі, що $\left| \frac{a^2 + b^2 - c^2}{ab} \right| < 2$. Доведіть, що для цих чисел виконуються також нерівності $\left| \frac{b^2 + c^2 - a^2}{bc} \right| < 2$ та $\left| \frac{a^2 + c^2 - b^2}{ac} \right| < 2$.
3. На площині відмічено скінченну кількість точок (точок хоча б дві). Диском називемо круг, який побудований на відрізку, що з'єднує дві відмічені точки, як на діаметрі. Якою найменшою кількістю дисків гарантовано вдасться покрити всі відмічені точки?
4. Натуральні числа a і b такі, що $a+b^3$ ділиться на $a^2+3ab+3b^2-1$. Доведіть, що число $a^2+3ab+3b^2-1$ ділиться на куб деякого цілого числа, більшого за 1.