

Відбір на Всеукраїнську олімпіаду з математики. 2020 рік. 8 клас. 2 тур

1. Точки A_1 , B_1 та C_1 симетричні центру I вписаного кола трикутника ABC відносно його сторін. Виявилось, що вершина A належить описаному колу трикутника $A_1B_1C_1$. Знайдіть величину кута BAC .
2. Ненульові дійсні числа a , b та c такі, що $a^2 + a = b^2$, $b^2 + b = c^2$ та $c^2 + c = a^2$. Доведіть, що $(a - b)(b - c)(c - a) = 1$.
3. У деякій країні є кілька міст. Між будь-якими двома містами або взагалі немає прямого сполучення, або є авіасполучення, або є сполучення залізницею (одночасно і авіасполучення, і залізниця бути не може). Відомо, що якщо два міста з'єднані з третім залізницею, то між ними є авіалінія, а якщо два міста з'єднані з третім авіалініями, то між ними є залізниця. Доведіть, що зі столиці, використовуючи тільки залізницю, можна потрапити (з пересадками) не більше ніж до 4 інших міст.
4. Знайдіть усі пари натуральних чисел (m, n) , що задовольняють рівність $n! + 4 = 4(n + 3)^m$.