

## **Відбір на Всеукраїнську олімпіаду з математики. 2020 рік. 11 клас. 2 тур**

**1.** Задано трикутник  $ABC$ , у якому  $\angle A < 90^\circ$  та  $AB \neq AC$ . Нехай  $H$  – це ортоцентр трикутника  $ABC$ , а  $M$  та  $N$  – середини відрізків  $BC$  та  $AH$  відповідно. Бісектриса кута  $BAC$  перетинає відрізок  $MN$  у точці  $D$ . Доведіть, що  $\angle ADH = 90^\circ$ .

**2.** Задано натуральне число  $n$ . Знайдіть усі додатні числа  $x$ , що задовольняють рівність

$$nx^2 + \frac{2^2}{x+1} + \frac{3^2}{x+2} + \dots + \frac{(n+1)^2}{x+n} = nx + \frac{n(n+3)}{2}.$$

**3.** Шон розкладав у рядок  $n$  карток, на яких написані числа від 1 до  $n$ . Будемо говорити, що пара карток утворює інверсію, якщо картка з більшим з двох номерів лежить лівіше картки з меншим номером. Рома бере картку з числом 1, рахує, скільки карток було ліворуч від неї, і вставляє її у рядок так, щоб тепер стільки карток стало праворуч від неї. Далі він повторює цю операцію по черзі з картками, номери яких 2, 3, ...,  $n$ . Доведіть, що після того, як Рома здійснить усі  $n$  операцій, кількість інверсій виявиться такою ж, як і на початку.

**4.** Доведіть, що не існує такого натурального числа  $n$ , що число  $5^n - 1$  ділиться на  $2^n + 1$ .