

Відбір на Всеукраїнську олімпіаду з математики. 2020 рік. 10 клас. 2 тур

1. У деякій державі 1000 міст та зовсім немає доріг. Міністр інфраструктури мріє з'єднати кожен парю міст дорогою. Для цього він кожен рік розбиває міста на дві групи, й для кожної пари міст з різних груп наказує побудувати між ними дорогу, якщо її не побудували досі. За яку найменшу кількість років він зможе здійснити свою мрію?

2. Квадратний тричлен f задовольняє наступну умову: для будь-яких двох різних дійсних чисел x та y , таких, що $f(x) = f(y)$, виконується рівність $f(x^2 - 6y - 1) = f(y^2 + 8)$. Знайдіть усі можливі значення величини $\frac{f(8) - f(2)}{f(2) - f(1)}$.

3. Знайдіть усі натуральні числа n , для яких $n^2 + 3$ ділиться на $\varphi(n)$.

Тут $\varphi(n)$ – функція Ейлера.

4. У гострокутному трикутнику ABC точка H – ортоцентр, точки M і N – середини відрізків BC і AH відповідно. Точку D обрано на прямій MH таким чином, що $AD \parallel BC$. Точка K на прямій AH така, що чотирикутник $DNMK$ – вписаний. Точки E і F обрано на прямих AC і AB таким чином, що $\angle EHM = \angle ACB$ і $\angle FHM = \angle ABC$. Доведіть, що точки D, E, F, K лежать на одному колі.