

Відбір на Всеукраїнську олімпіаду з математики. 2019 рік. 11 клас. 1 тур

1. На площині розташовано декілька прямих таким чином, що кожна з них перетинає рівно 15 інших прямих. Яка кількість прямих може бути розташована на площині?
2. Про натуральне число n відомо, що число $\sqrt{12n^2 + 1}$ – також натуральне. Доведіть, що натуральним також є число

$$\sqrt{\frac{\sqrt{12n^2 + 1} + 1}{2}}.$$

3. У прямокутному трикутнику ABC точка H – основа висоти, проведеної до гіпотенузи AB цього трикутника. Точки M та N є серединами відрізків AH та BH відповідно. Позначимо через P та Q точки перетину прямих CM та CN відповідно з описаним колом трикутника ABC . Відрізки AQ та BP перетинаються у точці R . Доведіть, що пряма CR проходить через середину відрізка MN .

4. Нехай a, b, c – попарно взаємно прості числа, більші за 1.

а) Доведіть, що многочлен $(1 - x^a)(1 - x^b)(1 - x^c)(1 - x^{abc})$ ділиться на многочлен $(1 - x)(1 - x^{ab})(1 - x^{ac})(1 - x^{bc})$.

б) Доведіть, що у многочлена

$$\frac{(1 - x^a)(1 - x^b)(1 - x^c)(1 - x^{abc})}{(1 - x)(1 - x^{ab})(1 - x^{ac})(1 - x^{bc})}$$

є принаймні один від'ємний коефіцієнт.