Відбір на Всеукраїнську олімпіаду з математики. 2020 рік. 10 клас. 1 тур

1. Чи можна з чисел 1!, 2!,..., 99!, 100! викреслити одне так, щоб добуток чисел, що залишились, був кубом натурального числа?

2. Нехай b – дотична, що проведена у точці B до описаного кола нерівнобедреного гострокутного трикутника ABC. Точка H – ортоцентр трикутника ABC. Точка K – основа перпендикуляра, що опущений з H на b. Точка L – середина AC. Доведіть, що трикутник BKL – рівнобедрений.

3. Нехай $A = \sum\limits_{n=1}^{99} \sqrt{10+\sqrt{n}}$, а $B = \sum\limits_{n=1}^{99} \sqrt{10-\sqrt{n}}$. Доведіть, що $A = (\sqrt{2}+1)B$.

4. Чи можна розташувати на площині 100 кругів D_2, D_3,..., D_{101} так, щоб для будь-яких двох натуральних чисел n та m таких, що $1 < n < m \leqslant 101$, круги D_n та D_m не перетинались, якщо НСД$(n, m) = 1$, та круг D_n містив круг D_m, якщо n ділиться на m?