# Харківська обласна олімпіада з математики, 9 клас, 2020 р.

## I тур

**1.** З Міста до селища Простоквашино пішки вийшов Дядя Федір, а йому на зустріч з селища до Міста виїхав на велосипеді поштар Пєчкін. Через годину Дядя Федір опинився рівно посередині між Містом та Пєчкіним. Ще через 15 хвилин вони зустрілися, привіталися, та продовжили свій рух. Скільки часу витратив Дядя Федір на шлях від Міста до селища?

**2.** Доведіть, що не існує різних натуральних чисел $a$ і $b$, для яких

$$\left\{\left\{\frac{a}{b}\right\}+\left\{\frac{b}{a}\right\}\right\}=0.$$

*Тут через $\{x\}$ позначена дробова частина $x$, тобто різниця між числом $x$ та найбільшим цілим числом, що не перевищує $x$.*

**3.** Назвемо квазіквадратом фігуру, що складається з квадрату $n \times n$, $n \geqslant 4$, до якої зовні приєднано ще один квадратик $1\times 1$, що має спільну сторону з одним з квадратів квадрату $n\times n$. Чи завжди можна такими однаковими квазіквадратами покрити усю площину? Квазіквадрати не мають накладатися один на інший, але їх можна повертати та перегортати.

**4.** Нехай точка $D$ лежить на дузі $AC$ описаного кола трикутника $ABC$ ($AB < BC$), що не містить точку $B$. На стороні $AC$ вибрані довільна точка $X$ та точка $X'$, для якої $\angle ABX = \angle CBX'$. Доведіть, що незалежно від вибору точки $X$, коло, яке описане навколо трикутника $DXX'$, проходить через фіксовану точку, що відмінна від точки $D$.

**5.** Для додатних чисел $a$, $b$, $c$ доведіть нерівність:

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}+6 \geqslant 9\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+ac+bc}.$$

## II тур

**1.** У Банановій республіці пройшли вибори до парламенту. Відомо, що всі мешканці, які голосували за партію «Авокадо», люблять авокадо, а серед тих, хто голосував за інші партії, відсоток тих, хто любить авокадо, складає 10%. Скільки відсотків голосів набрала партія «Авокадо», якщо рівно 46% учасників голосування люблять авокадо?

**2.** На катеті $BC$ прямокутного трикутника $ABC$ задано такі точки $D$ та $E$, що $\angle DAC = \angle EAD = \angle BAE$. Основи перпендикулярів з точок $D$ та $E$ на гіпотенузу $AB$ позначимо через $K$ та $S$ відповідно. Відрізок $CK$ перетинає відрізок $AE$ у точці $H$. Пряма, що проходить через $H$ паралельно $AD$, перетинає відрізок $BC$ у точці $M$. Доведіть, що в чотирикутник $CHSM$ можна вписати коло.

**3.** Нехай $N = 789! + \dfrac{790!}{1!} + \dfrac{791!}{2!} + \ldots + \dfrac{2020!}{1231!}$. Доведіть, що $N$ ділиться на всі натуральні числа від 1232 до 2021 включно.

**4.** У деяких клітинках дошки $n \times n$ стоять фішки. Відомо, що якщо у деякій клітинці немає фішки, то в стовпчику та рядку, що містять цю клітинку, всього стоїть не менше ніж $n$ фішок. Доведіть, що загальна кількість фішок на дошці не менша за $\dfrac{n^2}{2}$.