

Харківська обласна олімпіада з математики, 8 клас, 2020 р.

I тур

1. Знайдіть усі можливі натуральні числа n такі, що менші ніж 1% від числа 2020, а число $n + 1$ більше ніж 1% від числа 2019.
2. Три ченці медитують у печері. Кожен ченець бреше протягом двох послідовних днів тижня та каже правду в усі інші дні тижня. Жодні два ченці не брешуть в один день. У понеділок перший ченець сказав: «Вчора я брехав.» Наступного дня другий ченець відповів: «Який цікавий збіг! Я теж брехав учора.» В який день тижня не бреше жоден ченець? *Неділя й понеділок – послідовні дні тижня.*
3. Вася виписав усі семицифрові числа, що містять кожен цифру від 1 до 7 рівно один раз. Доведіть, що жодне з виписаних чисел не ділиться на жодне інше з цих чисел.
4. Дано 11 гир попарно різної ваги, і кожна важить ціле число грамів. Відомо, що як би не розкласти гирі (усі або частину) на дві шальки вагів, так щоб гир на них було не порівну, завжди переважить шалька, на якій гир більше. Доведіть, що хоча б одна з гир важить більше, ніж 35 грамів.
5. У трикутнику ABC виконано $\angle A = 90^\circ$, $45^\circ < \angle C < 60^\circ$. Точка M – середина сторони BC . Перпендикуляр до AM , що проходить через C , перетинає катет AB в точці D . На стороні AC взяли точку E , K – точка перетину прямих CD і BE . Доведіть, що якщо трикутник CEK – рівнобедрений, то $BK = 2AE$.

II тур

1. Велогонщики Кристофер та Алехандро одночасно стартують в одному напрямку з різних точок кругового велотреку довжиною 3 км. Кожен велогонщик їде з постійною швидкістю. Перший раз Кристофер наздогнав Алехандро через 5 хвилин після старту, другий раз – через 15 хвилин після старту. На скільки метрів Кристофер відставав від Алехандро в момент старту?
2. У трикутнику ABC кут B удвічі більший за кут C . Точка D – основа висоти, що опущена з точки A на BC , а точка E – середина BC . Доведіть, що $AB = 2DE$.
3. Шон знайшов добуток усіх дільників натурального числа n . Рома збільшив кожен дільник на 1, а потім перемножив результати. Добуток Роми ділиться без остачі на добуток Шона. Чому може дорівнювати n ?
4. Дано клітчастий квадрат $2^n \times 2^n$, з якого вирізано одну клітинку. Микита хоче розрізати цю фігуру на кілька прямокутників, площа кожного з яких є степенем двійки з цілим невід'ємним показником. Якої найменшої кількості прямокутників йому гарантовано вистачить, де б не знаходилася вирізана клітинка?