

Харківська обласна олімпіада з математики, 11 клас, 2020 р.

I тур

1. З'ясуйте, яке з чисел більше 2 чи $\operatorname{tg} 1$?

2. Знайдіть найменше значення функції $f(x) = 2x^2 - 1 + \frac{1}{x^2 + 1}$.

3. Заданий білий квадрат $ABCD$ завбільшки 8×8 , що складається з 64 одиничних квадратиків (клітинок) 1×1 . За одну дію можна вибрати будь-який а) квадрат; б) прямокутник, що складається з цілої кількості одиничних квадратиків і містить принаймні одну з вершин квадрату $ABCD$, та поміняти в ньому колір кожної клітинки на протилежний (білий замінюється на чорний та навпаки). Чи можна за допомогою таких дій отримати довільне розфарбування клітин квадрату $ABCD$?

4. Дано гострокутний нерівнобедрений трикутник ABC , AK та CN – його бісектриси, I – їх точка перетину. Нехай точка X – друга точка перетину кіл, описаних навколо трикутників ABC та KBN . Нехай M – середина сторони AC . Доведіть, що пряма Ейлера трикутника ABC перпендикулярна прямій BI тоді і тільки тоді, коли точки X , I та M лежать на одній прямій. *Прямою Ейлера у нерівносторонньому трикутнику називається пряма, що проходить через точку перетину висот, точку перетину медіан та центр описаного кола трикутника.*

5. Для додатних чисел a , b , c , що задовольняють умову

$$a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4,$$

доведіть нерівність

$$(4 - a^2)(4 - b^2)(4 - c^2) a^2 b^2 c^2 \leq (2a + bc)(2b + ac)(2c + ab).$$

II тур

1. Знайдіть усі дійсні значення x , для яких виконується рівність

$$\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x-2}} + \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x+2}} = \frac{1}{4}.$$

2. Нехай ABC – трикутник, у якого $AB < AC < BC$; O – центр описаного кола, а D – середина меншої дуги AB цього кола. Пряма AD перетинає пряму BC у точці E , а описане коло трикутника BDE перетинає AB у точці Z ($Z \neq B$). Описане коло трикутника ADZ перетинає AC у точці H ($H \neq A$). Доведіть, що $BE = AH$.

3. Задано натуральне число $n \geq 2$ й усі його натуральні дільники $1 = d_1 < d_2 < \dots < d_k = n$. Доведіть, що $d_1 d_2 + d_2 d_3 + \dots + d_k d_1 \leq n^2$.

4. У компанії з 2021 людини кожна пара людей має рівно одного спільного знайомого, який відрізняється від цих людей. Знайдіть найменшу можливу різницю між кількістю знайомих у людини, яка має найбільшу кількість знайомих, та кількістю знайомих у людини, яка має найменшу кількість знайомих.