Харківська обласна олімпіада з математики, 10 клас, 2020 р.

I тур

1. Чи існують попарно різні натуральні числа a, b та c, для яких

$$\left\{\left\{\frac{a}{b}\right\}+\left\{\frac{b}{c}\right\}+\left\{\frac{c}{a}\right\}\right\}=0?$$

Дроби не обов'язково мають бути нескоротними.

Тут через $\{x\}$ позначена дробова частина x, тобто різниця між числом x та найбільшим цілим числом, що не перевищує x.

2. Чи існує нескінченна послідовність натуральних чисел, що є точними квадратами, така, що кожен її елемент, починаючи з третього, дорівнює сумі двох попередніх?

3. Чи можна непарною кількістю L-тетраміно і деякою кількістю прямих тетраміно замостити деякий прямокутник? Тетраміно не можуть виходити за межі прямокутника, кожна клітинка прямокутника має бути покрита рівно одним тетраміно.

4. Для додатних чисел a, b, c доведіть нерівність:

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}+6\geqslant 9\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+ac+bc}.$$

5. Дано гострокутний нерівнобедрений трикутник ABC, AK та CN – його бісектриси, I – їх точка перетину. Нехай точка X – друга точка перетину кіл, описаних навколо трикутників ABC та KBN. Нехай M – середина сторони AC. Доведіть, що пряма Ейлера трикутника ABC перпендикулярна прямій BI тоді і тільки тоді, коли точки X, I та M лежать на одній прямій.
Прямою Ейлера у нерівносторонньому трикутнику називається пряма, що проходить через точку перетину висот, точку перетину медіан та центр описаного кола трикутника.

II тур

1. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases}\sin x=\operatorname{tg} y,\\ \cos x=\operatorname{ctg} y.\end{cases}$$

2. Знайдіть найменше натуральне n, для якого можна пофарбувати числа 1, 2, …, 1000 у n кольорів таким чином, щоб будь-які два числа, одне з яких ділиться на інше, були пофарбовані в різні кольори.

3. У нерівнобедреному трикутнику ABC кут при вершині A дорівнює $60°$. Нехай D – це точка перетину бісектриси кута BAC із стороною BC, O – центр описаного кола трикутника ABC, а E – точка перетину AO та BC. Доведіть, що $\angle AED+\angle ADO=90°$.

4. Множина A складається з усіх натуральних чисел, які можна представити у вигляді $2x^2+3y^2$, де x і y – цілі числа.
а) Доведіть, що жодне з чисел з цієї множини не є точним квадратом.
б) Доведіть, що добуток непарної кількості елементів множини A не є точним квадратом.