Областная олимпиада юных математиков, 9 класс, 2019 г.

I тур

1. Розглянемо на декартовій площині сукупність парабол $y = kx^2 + (k-n)x + (k+n)$, де k, n – довільні цілі числа. Чи існує точка з цілими координатами, через яку не пройде жодна з таких парабол?

2. В прямокутному трикутнику ABC довжини катетів задовольняють умові: $BC = \sqrt{2}AC$. Доведіть, що медіани AN та CM взаємно перпендикулярні.

3. На довгій паперовій смужці без пробілів записані три числа 2^{100}, 3^{100} та 5^{100}, так що утворилося багатоцифрове число N. Арсеній стверджує, що може змінити останню цифру числа N так, що утвориться степінь числа 13. Чи правий він?

4. Для додатних чисел x, y, z доведіть нерівність:

$$\frac{x^8+1}{x^4} + \frac{y^8+1}{y^4} + \frac{z^8+1}{z^4} \geqslant 2 \cdot \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{y} + \frac{y}{x}\right).$$

5. В клітинках таблиці 4×4 розставлені натуральні числа так, що сума чисел у довільних двох сусідніх по стороні клітинках є факторіалом натурального числа. Доведіть, що у цій таблиці знайдуться принаймні 4 рівних числа.

II тур

1. Числа a, b, c удовлетворяют равенствам $3a+4b = 3c$ и $4a-3b = 4c$. Докажите, что $a^2+b^2 = c^2$.

2. Все делители числа 101! выписаны на доску. Юля и Петя по очереди стирают с доски по одному делителю. Первым ходом Юля стирает число 101!. Если на предыдущем шаге было стерто число x, то на следующем шаге можно либо стирать число, являющееся делителем x, либо стирать число, делящееся на x. Кто не может сделать ход, тот проиграл. Кто выигрывает при правильной игре, как бы ни играл соперник?

3. В остроугольном треугольнике ABC выполнено $AB < BC$. Точка B_1 – основание высоты, опущенной из вершины B, точка O – центр описанной окружности треугольника ABC. Прямая l параллельна прямой CO, проходит через B_1 и пересекает прямую BO в точке P. Докажите, что точка P и середины сторон AB и AC лежат на одной прямой.

4. Докажите, что простое число p можно представить в виде $p = \dfrac{a^4-b^4}{a^3+b^3}$ для некоторых натуральных чисел a и b тогда и только тогда, когда p является суммой квадратов двух последовательных натуральных чисел.