Областная олимпиада юных математиков, 8 класс, 2019 г.

I тур

1. Розглянемо на декартовій площині сукупність прямих $y = (k+n)x + (k-n)$, де k, n – довільні цілі числа. Чи існує точка з цілими координатами, через яку не пройде жодна з таких прямих?

2. На дошці записане число 2019. Катя та Микола по черзі (розпочинає Катя) роблять такі ходи: вони вибирають будь-який дільник d записаного на дошці числа N і записують на дошці замість числа N число $N - (2d - 1)$, якщо воно є натуральним. Програє той, хто напише на дошці число 1. Хто може перемогти в цій грі, якщо кожний прагне перемогти?

3. У гострокутному трикутнику ABC відомо, що $2AC = AB$ та $\angle A = 2\angle B$. У цьому трикутнику провели бісектрису AL, і позначили точку M – середину сторони AB. Виявилося, що $CL = ML$. Доведіть, що $\angle B = 30°$.

4. Знайдіть натуральне число n, для якого справджується рівність: $n^2 = 2 \cdot (20^4 + 19^4 + 39^4)$.

5. В клітинках таблиці 3×3 розставлені натуральні числа так, що сума чисел у довільних двох сусідніх по стороні клітинках є факторіалом натурального числа. Доведіть, що у цій таблиці знайдуться принаймні 3 рівних числа.

II тур

1. Леша и Никита наломали дров и начали хвастаться друг другу, кто сколько наломал. При этом Леша преувеличил свои успехи в 2 раза, Никита в 7 раз, а в сумме получилось втрое больше дров, чем на самом деле. Кто наломал дров больше и во сколько раз?

2. 20 футбольных команд провели однокруговой турнир (каждая команда сыграла с каждой из остальных ровно по одному разу). За победу в матче начислялось 3 очка, за ничью – 1 очко, а за поражение – 0 очков. По окончании турнира выяснилось, что общее число набранных очков равно 554. Докажите, что можно найти 7 команд, у каждой из которых на турнире была хотя бы одна ничья.

3. Окружность касается стороны AB треугольника ABC в точке A, стороны BC – в точке P и пересекает сторону AC в точке Q. Прямую PQ симметрично отразили относительно AC. Полученная таким образом прямая l пересекает прямую AP в точке X. Докажите, что $PC = CX$.

4. Найдите все пары натуральных чисел (x, y), для которых число $x^2 + 2y - 1$ делится на xy.